

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Comprendre une invasion biologique</b>	<b>1</b>
1.1	Dériver une EDP depuis un modèle stochastique . . . . .	1
1.2	Quelques propriétés de l'équation de la chaleur . . . . .	4
1.3	Dispersion non locale . . . . .	7
1.4	Réaction diffusion . . . . .	8
1.4.1	En domaine borné . . . . .	9
1.4.2	Sur l'espace entier : existence des fronts . . . . .	9
1.4.3	Stabilité des fronts . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Transports</b>	<b>20</b>
2.1	Bestiaire d'hyperbolicité . . . . .	21
2.2	Le transport unidimensionnel à vitesse constante . . . . .	23
2.3	Sur le demi-espace . . . . .	24
2.4	Un modèle démographique : l'équation de renouvellement . . . . .	26
2.4.1	Résolution par les caractéristiques . . . . .	26
2.4.2	Comportement asymptotique via le problème spectral . . . . .	28
2.5	Un modèle de division cellulaire . . . . .	29

## 1 Comprendre une invasion biologique

### 1.1 Dériver une EDP depuis un modèle stochastique

#### » Notations :

- $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  : variable temporelle et d'espace (position géographique)
- $N$  : nombres d'individus dans la population
- $u(t, x)$  densité de population - nombre d'individus par unité d'espace.

Notre objectif est de connaître  $u$ , en supposant connu le comportement d'individus sur une (petite) tranche d'espace de taille  $\xi$ . Cela va permettre, via des limites d'échelle, de dériver une équation sur  $u$ , dont on étudiera ensuite les propriétés. Pour simplifier dans toute la suite, on suppose  $d = 1$  (espace unidimensionnel)

- $dN(t, x)$  : nombre d'individus à l'intérieur de la tranche  $(x, x + \xi)$
- On a

$$u(t, x) = \frac{dN(t, x)}{\xi}.$$

C'est une manière de définir  $u$  à partir d'un dénombrement local.

- Soit  $p(t, x)$  la probabilité de trouver un individu au temps  $t$  à la position  $x$ .

On va donc utiliser un raisonnement probabiliste pour mesurer les déplacements de la population à une échelle individuelle.

» **Relier relie un seul individu avec  $N$  individus en probabilités**

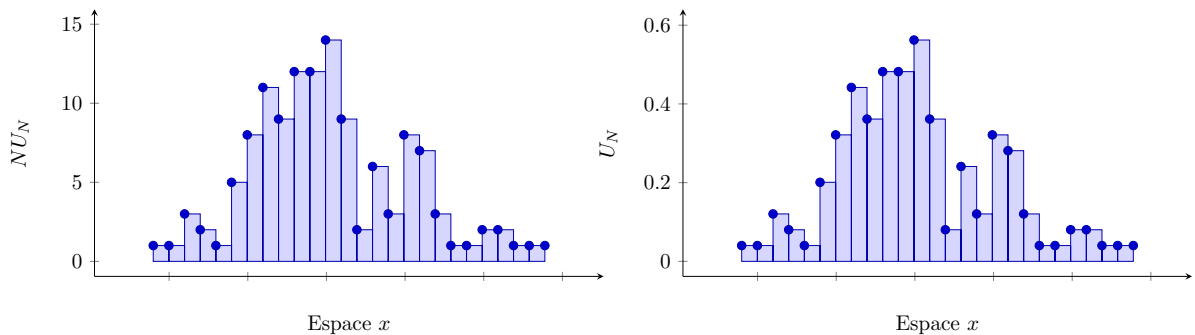
On utilise un processus appelé la *mesure empirique* de l'individu  $k$ ,  $X_k$ , pour  $1 \leq k \leq N$  :

$$X_k(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } k \text{ est présent à la position } x \text{ au temps } t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La population est alors représentée par la *distribution empirique*  $U^N$

$$U^N(t, x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(t, x).$$

$U_N(t, \cdot)$  peut être représenté simplement par un histogramme.



Les résultats théoriques de proba permettent de passer de la loi de  $X_k$  à celle de  $U^N$  : loi des grands nombres, théorème central limite, méthodes Monte Carlo, méthodes de tir... Par définition de  $p$ ,  $X_k$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p(t, x)$  :

$$X_k(t, x) \sim \mathcal{B}(p(t, x)).$$

Remarquons que cela implique que la loi est la même pour tous les individus, indépendamment du nombre d'individus à la position, du mouvement d'autres individus, etc. Par la loi des grands nombres, on obtient

$$U^N(t, x) \underset{N_{\text{grand}}}{\sim} \mathbb{E}[X_k(t, x)] = p(t, x). \quad (1)$$

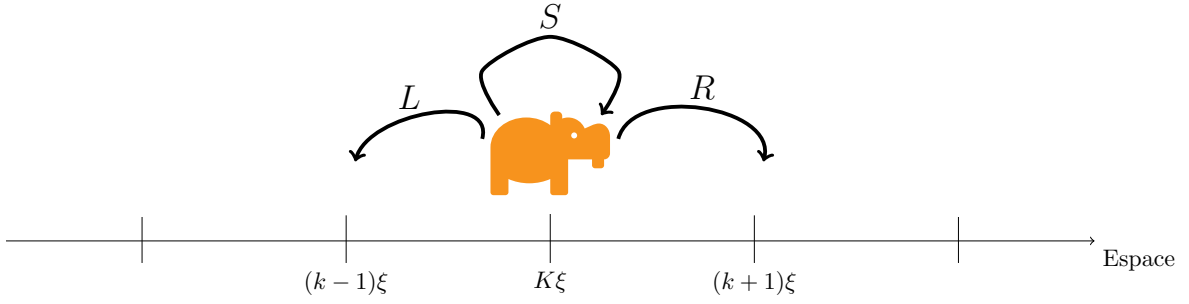
Ce raisonnement va nous servir de blueprint pour la suite de la modélisation.

» **Mesurer la probabilité de trouver un individu**

Pour déterminer  $p(t, x)$  on va utiliser un raisonnement "par récurrence", en faisant des hypothèses sur les probabilités de transition d'une chaîne de Markov. On se donne  $\tau > 0$  un incrément de temps, et  $k \in \mathbb{Z}$  pour discrétiser l'espace  $\mathbb{R}$  :

$$p(t + \tau, \xi k) = Sp(t, k\xi) + Mp(t, (k - 1)\xi) + Mp(t, (k + 1)\xi). \quad (2)$$

Pour rendre cela rigoureux, on utilise la formule des probabilités totales, en conditionnant l'arrivée au temps  $t + \tau$  aux différents point de départ possibles.



Le nombre  $S$  tel que  $0 \leq S \leq 1$  est la probabilité de rester à sa position sur un temps  $\tau$ , tandis que  $2M := L + R$  est celle de bouger. Le mouvement d'un individu est donc indépendant du temps, de la position, et sans biais directionnel si  $L = R$ , ce que l'on supposera par la suite. Naturellement,  $S + 2M = 1$ . Ce mouvement est également **local** : on ne bouge que vers (ou depuis) une position voisine.

L'équation (2) a ainsi défini les incréments de  $p$ . En continu, cela appelle l'utilisation de dérivées. Mais il y a un obstacle : la variable d'espace est seulement définie sur une grille d'espace discrète. Pour passer au continu, on note  $x := k\xi$ . En toute rigueur on doit utiliser la définition d'une densité de probabilité  $q$ , à la place d'une probabilité ponctuelle  $p$  :

$$\mathbb{P}(\text{individu entre } x \text{ et } x + \xi \text{ au temps } t) = \int_x^{x+\xi} q(t, s) ds.$$

En première approximation, on écrira que cette probabilité est donnée par  $q(t, x)\xi + o(\xi)$ . On peut considérer que  $q$  interpole  $p$  par la formule

$$q(t, x) \approx \frac{p(t, k\xi)}{\xi} + o(1).$$

La relation markovienne (2) sur  $p$  correspond désormais à

$$q(t + \tau, x) = Sq(t, x) + Mq(t, x - \xi) + Mq(t, x + \xi).$$

Comme on a défini  $q$  sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , on peut faire des développements de Taylor. On trouve

$$\begin{aligned} q(t + \tau, x) &= q(t, x) + \tau \frac{\partial q}{\partial t}(t, x) + o(\tau^2), \\ q(t, x + \xi) &= q(t, x) + \xi \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x) + o(\xi^3), \\ q(t, x - \xi) &= q(t, x) - \xi \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x) + o(\xi^3). \end{aligned}$$

Par substitution, on obtient

$$q(t, x) + \tau \frac{\partial q}{\partial t}(t, x) + o(\tau^2) = (S + 2M)q(t, x) + M\xi^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x) + o(\xi^3).$$

Après simplification,

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t, x) = \frac{M\xi^2}{\tau} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x) + o\left(\frac{\xi^2}{\tau}\right).$$

On voit apparaître des conditions nécessaires de scaling espace/temps, ou limite d'échelle, pour pouvoir passer à la limite :

$$\lim_{(\xi, \tau) \rightarrow (0,0)} \frac{M\xi^2}{\tau} = D \in \mathbb{R}_*. \quad (3)$$

On retrouve ces conditions sous une forme plus générale pour passer à la limite dans les marches aléatoires (Théorème de Donsker). Le nombre  $D$  est le coefficient de diffusion de la population, il modélise sa capacité à se déplacer.

Le calcul précédent nous a permis d'obtenir l'équation phare pour la dispersion locale d'individus :

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t, x) = D \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x). \quad (4)$$

On reconnaît l'équation de la chaleur, probablement déjà rencontrée en physique.

### » Equation sur la densité de population

On veut enfin revenir à notre objectif initial, obtenir une modélisation de la densité du nombre d'individus, que nous avons noté  $u$ . On va raisonner de manière assez formelle. On utilise l'hypothèse que  $N$  est très grand, et donc en vertu de (2), le nombre d'individus sur la tranche  $(x, x + \xi)$  vérifie

$$dN(t, x) \sim Np(t, x)$$

On en déduit

$$u(t, x) = \frac{dN(t, x)}{\xi} \sim N \frac{p(t, x)}{\xi} = Nq(t, x).$$

Ainsi, en imaginant que  $N$  est tellement grand que ses fluctuations sont négligeables, on obtient de nouveau l'équation de la chaleur, en utilisant (4) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x). \quad (5)$$

## 1.2 Quelques propriétés de l'équation de la chaleur

- Si  $u$  est une solution de (5), alors pour tout  $\lambda > 0$ , la fonction  $u_\lambda$  est aussi une solution :

$$u_\lambda(t, x) := u(\lambda t, \sqrt{\lambda}x). \quad (6)$$

En particulier, on peut chercher une solution particulière (dite auto-similaire) sous la forme

$$u_s(t, x) = f(\lambda)u(\lambda t, \sqrt{\lambda}x).$$

Avec  $f(\lambda) = \lambda^\alpha$  et  $\lambda = 1/t^\alpha$ , on trouve une condition nécessaire sur la forme de  $u_s$

$$u_s(t, x) = \frac{1}{t^\alpha} \omega \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right)$$

On laisse en exercice la détermination de  $\omega$  et  $\alpha$ . On vérifiera les calculs avec le prochain résultat.

► On définit

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-|x|^2/(4Dt)}. \quad (7)$$

Il s'agit de **la solution fondamentale** de l'équation de la chaleur. Cela veut dire que  $\varphi$  est solution de (5), couplée à la donnée initiale "Dirac"

$$\varphi(0, x) = \delta(0)$$

Le concept de solution fondamentale est très important en EDP car il permet, entre autres de construire d'autres solutions. Il faut noter que pour tout  $t > 0$  :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, x) dx = 1.$$

► Comme en EDOs, l'unicité d'une solution est un aspect déterminant pour s'assurer du caractère bien posé de la modélisation. Pour l'obtenir il faut, similairement, souvent regarder le problème de Cauchy associé :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = D\Delta u(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (\text{Cauchy } \mathbb{R}^d)$$

En toute généralité il n'y a pas d'unicité pour ce problème de Cauchy. Par exemple, Tychonoff, [15], a montré qu'en notant  $f(t) = \exp(-1/t^2)$

$$u_{\mathcal{T}}(t, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(t)x^{2n}}{(2n!)}$$

était une solution non triviale de (Cauchy  $\mathbb{R}^d$ ) avec  $u_0 = 0$  et  $D = 1$ . Cela montre qu'il existe au moins deux solutions dans ce cas là (la solution nulle étant l'autre). Il a par ailleurs démontré que le comportement à l'infini de la donnée initiale était un critère déterminant pour l'unicité : si il existe  $c, C$  tel que  $u_0$  vérifie

$$u_0(x) \leq Ce^{cx^2},$$

Alors il existe une unique solution au problème (Cauchy  $\mathbb{R}^d$ ).

Mentionnons par soucis de complétude qu'on ne s'est intéressé ici qu'au problème de Cauchy posé sur l'espace entier  $\mathbb{R}^d$ . Si on suppose au contraire que l'espace est un domaine  $\Omega$ , les résultats sont profondément différents, en particulier si le  $\Omega$  est borné.

► Si on est plus exigeant sur la donnée initiale, on obtient des résultats plus forts, tel que le théorème suivant

**Théorème .** *Supposons que  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Alors, soit  $u$  la fonction donnée par*

$$u(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi Dt})^d} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) e^{-|x-y|^2/(4Dt)} dy. \quad (8)$$

*De plus,*

(a) *Gain de régularité :  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_* \times \mathbb{R}^d)$*

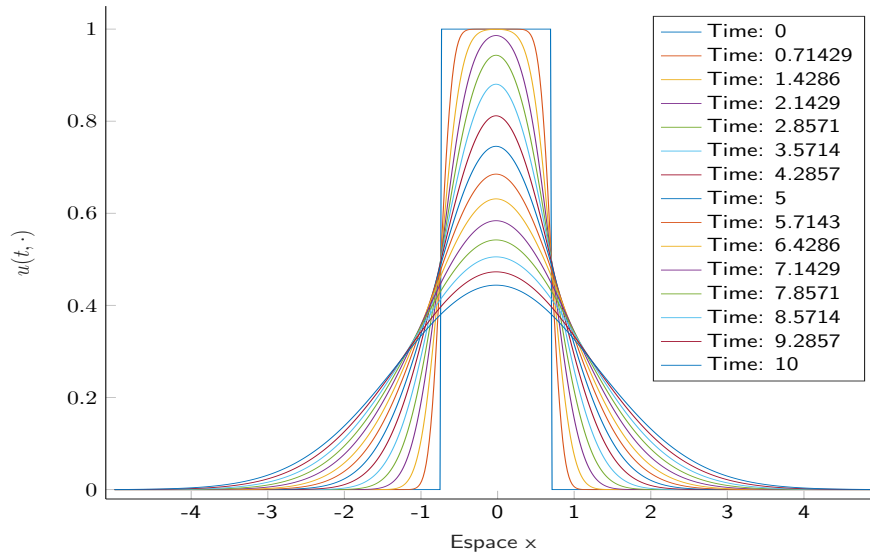
(b) Pour tout  $t > 0, x \in \mathbb{R}^d$ ,  $(\partial_t u - D\Delta u)(t, x) = 0$  :  $u$  est *solution de l'équation de la chaleur*.

(c) Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , fixé,

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x_0) = u_0(x_0).$$

(d) Conservation de la masse :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) dx.$$



*Démonstration.* On commence par remarquer que

$$u(t, x) = (u_0 * \varphi)(t, x). \quad (9)$$

Ici  $*$  s'entend comme la convolution sur la variable d'espace.

(a) C'est une propriété immédiate de la convolution, en utilisant (9) et le fait que  $\varphi$  soit elle même infiniment dérivable.

(b) Soit  $t > 0, x \in \mathbb{R}^d$ .

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \varphi - D\Delta \varphi)(t, x - y) u_0(y) dy = 0.$$

(c) Il faut epsiloniser en utilisant la continuité de  $u_0$ . La différence entre les deux termes est petite autour de  $x_0$  par continuité. L'autre morceau est contrôlé par  $\varepsilon$  grâce à la queue exponentielle.

(d) On utilise Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t, x - y) u_0(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) dy.$$

□

Remarquons que la formule (9) est assez générale pour construire des solutions d'EDP (linéaires), on appelle cela le principe de Duhamel (c'est l'équivalent de la variation de la constante pour résoudre une EDO).

- ▶ Étalement : pour tout point fixé  $x$  de l'espace, on a  $u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ .

### 1.3 Dispersion non locale

On veut refaire le raisonnement ayant amené à l'équation (5), mais en s'affranchissant de l'hypothèse de mouvement local. On imagine que depuis une position de l'espace, un individu puisse se déplacer partout.

On repart donc d'un temps  $t$  fixé, et on s'imagine qu'un individu est à la position  $x$ . Au temps  $t + \tau$ , ( $\tau > 0$ ), quelles sont les positions possibles de l'individu ? On se donne  $\xi$  une variable aléatoire modélisant le déplacement de l'individu. On suppose que la loi de  $\xi$  admet une densité, notée  $K_{t,x}(\xi)$ . Pour désigner  $K$ , on parle souvent de noyau de dispersion. On peut considérer que le cas local traité précédemment est un cas particulier de cette description, avec la convention

$$K_{t,x}(\xi) = L(t, x)\delta_{-\xi_0} + R(t, x)\delta_{\xi_0} + S(t, x)\delta_0$$

et  $L(t, x) = R(t, x) = M$  et  $2M + S = 1$ . Plus généralement, le noyau  $K_{t,x}$  étant une densité de probabilité,

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_{t,x}(\xi) d\xi = 1$$

En d'autres termes, tous les individus qui partent pour voyager arrivent à destination, on n'égare personne sur le trajet. Le signe de la quantité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \xi K_{t,x}(\xi) d\xi$$

traduit le sens d'un éventuel biais directionnel (drift). La relation de récurrence entre le temps  $t + \tau$  et le temps  $t$ , ou condition de Markov, est donnée par

$$q(t + \tau, x) = \int_{\mathbb{R}^d} q(t, x - \xi) K_{t,x-\xi}(\xi) d\xi.$$

On peut toujours la démontrer en utilisant les probabilités conditionnelles, en conditionnant selon le point de départ. On parle de modèle "intégré-différence". Il traduit le fait que pour arriver à la position  $x$  au temps  $t + \tau$ , on somme toutes les probabilités des trajets possibles, depuis toutes les positions  $x - \xi$ . Dans le cas le plus simple où  $K$  ne dépend pas de la position et du temps de départ, on obtient l'EDP de dispersion non locale

$$\partial_t q(t, x) = [K * q - q](t, x). \tag{10}$$

En effet,

$$q(t + \tau, x) - q(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} q(t, x - \xi) K(\xi) d\xi - q(t, x) = [K * q - q](t, x).$$

Remarquons, qu'en localisant le noyau autour d'un point, on retrouve l'équation de la diffusion (avec un éventuel biais directionnel)

$$\begin{aligned}
[K * q - q](t, x) &= \int_{\mathbb{R}^d} [q(t, x - \xi) - q(t, x)] K(\xi) d\xi \\
&\approx \int_{\mathbb{R}^d} \left[ q(t, x) - \xi \partial_x q(t, x) + \frac{\xi^2}{2} \partial_{xx}^2 q(t, x) - q(t, x) \right] K(\xi) d\xi \\
&\approx - \left( \int_{\mathbb{R}^d} \xi K(\xi) d\xi \right) \partial_x q(t, x) + \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\xi^2}{2} K(\xi) d\xi \right) \partial_{xx}^2 q(t, x) \\
&\approx \frac{\text{Var}(K)}{2} \partial_{xx}^2 q(t, x) \quad (\text{si le noyau est centré}).
\end{aligned}$$

En pratique cette "approximation diffusive" donne lieu à beaucoup de mésinterprétations, on la maniera avec précautions. Observons en particulier, que cette approximation ne retient du noyau de dispersions que ses deux premiers moments, et qu'on perd donc toute information plus précise, comme celle de la probabilité des évènements longue distance. En effet cette information est dans la queue de distribution de  $K$ .

## Paradoxe de Reid

Pour cette discussion évoquée en cours, on pourra se référer, comme d'ailleurs pour toute cette section, au livre [12].

### 1.4 Réaction diffusion

On s'intéresse désormais à rajouter à la modélisation la prise en compte du contexte démographique. On va rajouter un taux, qui permettra en quelque sorte une balance entre les naissance et les morts. En toute généralité ce taux dépend de la position  $x$  mais aussi de la densité d'individus  $u(t, x)$ . En termes physique, cela correspond à la création/disparition d'individus, indépendamment de leur mouvement. On va noter  $f$  ce taux, et on est désormais amené à étudier

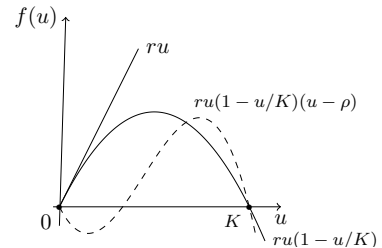
$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = D\Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)), & t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (11)$$

Ce type d'équation est nommé *équation de réaction diffusion*. Le Laplacien correspond au terme de *diffusion*, on a étudié en détail sa signification dans la partie précédente. La fonction  $f$  est le terme de *réaction*, qui modélise donc toutes les interactions avec l'environnement. Par souci de simplification, on présentera ici des résultats traitant uniquement du cas suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = D\Delta u(t, x) + f(u)(t, x), & t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = u_0(x). & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (\text{R-D})$$

Quelques exemples de terme de réaction dans ce contexte :

- Malthusien :  $f(u) = ru$ ,
- Logistique :  $f(u) = ru(1 - u/K)$ ,
- Bistable :  $f(u) = ru(1 - u/K)(u - \rho)$ .





Nous traiterons uniquement du terme de réaction  $f$  de type logistique. L'équation (R-D) porte alors le nom de **Fisher-Kolmogoriv-Petrovski-Piskounov**, ou Fisher-KPP :

$$\partial_t u(t, x) = D\Delta u(t, x) + ru(t, x) \left(1 - \frac{u(t, x)}{K}\right), \quad t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R} \quad (\text{F-KPP})$$

En rescalant les variables  $t' = rt$  et  $x' = x\sqrt{K/D}$ , on peut se ramener à l'équation adimensionnée

$$\partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x) + u(t, x) (1 - u(t, x)), \quad t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R} \quad (12)$$

On ne le fera pas car on veut pouvoir mener une analyse qualitative de l'influence du taux de diffusion  $D$ , de la capacité  $K$  et du taux de croissance  $r$ . Mentionnons que l'équation (12) apparaît naturellement dans bien d'autres contextes que celui de l'écologie. Elle peut modéliser par exemple la concentration d'une substance dans une réaction autocatalytique en chimie, la densité relative d'un allèle en génétique de populations, mais encore la température d'un mélange dans une réaction de combustion (liste non exhaustive). En élargissant à la forme générale (11) on trouve encore plus d'exemples d'applications motivant l'étude.

Nous présenterons uniquement quelques résultats pour le problème posé sur l'espace entier,  $\Omega = \mathbb{R}^d$ . Ainsi nous nous intéresserons uniquement à des résultats de type "spreading" : ie comprendre et mesurer comment une population peut envahir un domaine non borné.

#### 1.4.1 En domaine borné

Si on suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné, la principale question que l'on se pose est celle de la persistance/extinction de la population. Cela revient à connaître la positivité de la limite suivante

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) := u_\infty(x) ?$$

Lorsque qu'il y a persistance, c'est qu'il existe certains points tels que  $u_\infty(x) > 0$ . Dans ce cas là, on dit que  $u_\infty$  est un *état stationnaire*. C'est une solution du problème suivant

$$\Delta u_\infty(x) + f(u_\infty)(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (13)$$

L'étude de la forme des états stationnaires est en général très compliquée. Le type de résultat dépendra très fortement des conditions de bord du domaine  $\Omega$ , de la forme du terme de réaction, etc. Il est relié à la théorie spectrale, ie l'étude des vecteurs propres/fonctions propres de l'opérateur différentiel, ici  $\Delta + f(\cdot)$ . Pour une introduction pédagogique à ces problèmes, mais vu d'un point de vue des applications pour la physique, on pourra consulter [5]. De nombreux résultats qualitatifs et illustrés, dans une perspective de modélisation écologique se trouvent dans [12].

#### 1.4.2 Sur l'espace entier : existence des fronts

En domaine non borné il peut exister des solutions que l'on appelle des *fronts de propagation*, qui décrivent très bien des phénomènes d'invasion biologique. On appelle front de propagation une fonction qui se propage à vitesse constante. Le profil du front ne dépend pas du temps. Notons que ces phénomènes d'invasion correspondent à une réalité écologique manifeste : le rat musqué en Angleterre, le scarabée japonais, la chenille processionnaire du pin... Les enjeux sont donc grands de pouvoir assurer une description mathématique riche et fine.

💡 On cherche des solutions, les "fronts", de la forme

$$u(t, x) = U(x - ct). \quad (14)$$

$U$  est le profil constant,  $c$  est la vitesse du front. Arbitrairement, on va chercher une vitesse  $c$  positive, cela correspond à un front qui se déplace de la gauche vers la droite, mais qu'aucune signe n'est prescrit *a priori* par l'équation. Des résultats symétriques à ceux que l'on va détailler peuvent être obtenus avec des fronts et une vitesse négative, se déplaçant dans l'autre sens.

Utilisant l'ansatz (14) dans (F-KPP), le problème est désormais de trouver un couple  $(U, c)$  solution de

$$-cU' = DU'' + rU \left(1 - \frac{U}{K}\right). \quad (15)$$

Les points stationnaires de l'EDO logistique sont 0 (instable) et  $K$  (stable). Ce sont aussi des points stationnaires de l'EDO sur  $U$ , comme on le voit sur (15). On va supposer que le front est une trajectoire non triviale, reliant les deux états stationnaires en  $\pm\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} U = K. \quad (16)$$

Dans le cas d'une vitesse  $c$  négative, il faut bien entendu inverser les limites en  $\pm\infty$  de (16).

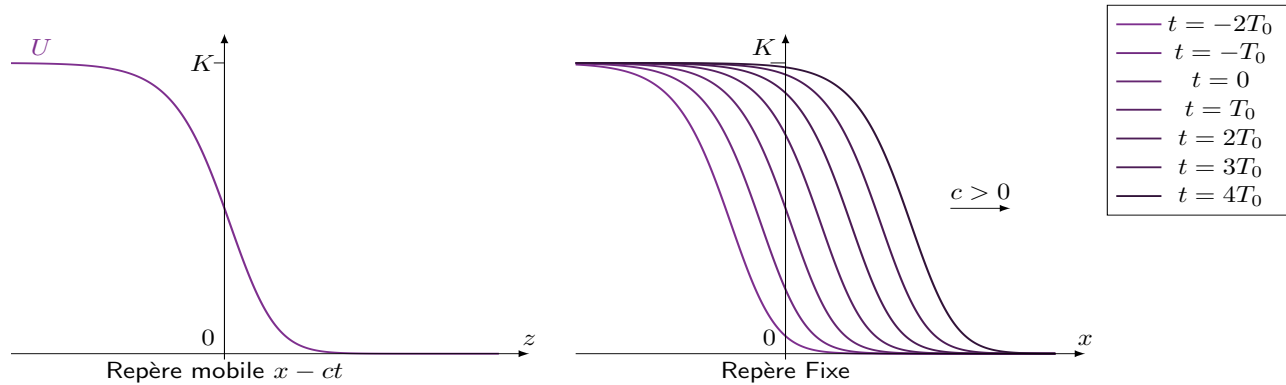


FIGURE 1 – Front  $U$  dans le repère mobile, et évalué à différents temps dans le repère fixe

L'EDO (15) est du deuxième ordre, non linéaire. A quoi ressemblent ses solutions, comment la résoudre? Pour des rappels méthodologiques, on consultera [3, 10].

💡 La méthodologie va consister à étudier le plan de phase. On va essayer d'avoir un raisonnement qualitatif basé dessus, puis on donnera des pistes pour rendre le raisonnement rigoureux. On définit le changement d'inconnue

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ U' \end{pmatrix}.$$

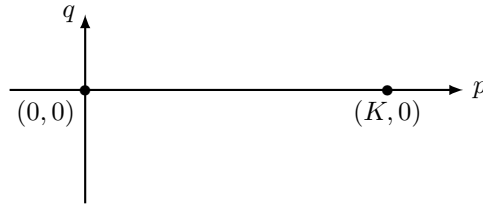
Cela donne un système d'EDO :

$$\begin{cases} p' = q \\ q' = -\frac{cq}{D} - \frac{rp}{D} \left(1 - \frac{p}{K}\right) \end{cases} \quad (17)$$

» **Points stationnaires.** On cherche  $(p_0, q_0)$  solution de

$$q_0 = 0, \quad \frac{rp_0}{D} \left(1 - \frac{p_0}{K}\right) = 0.$$

On trouve deux points d'équilibres :  $(0, 0)$  et  $(K, 0)$ . Pour en savoir plus, on regarde les isoclines, et/ou une linéarisation autour des points d'équilibre. Le but est de trouver une trajectoire qui relie les deux états d'équilibre.



Afin de linéariser, on a besoin de la matrice jacobienne. Dans notre cas, elle vaut

$$\mathcal{J}(p, q) = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 0 & D \\ -r + 2\frac{r}{K}p & -c \end{pmatrix}. \quad (18)$$

» **Linéarisation autour de  $(K, 0)$ .** On part de la matrice jacobienne (18)

$$\mathcal{J}(K, 0) = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 0 & D \\ r & -c \end{pmatrix},$$

et on cherche les valeurs propres de cette matrice. Le polynôme caractéristique vaut

$$P(\lambda) = (-\lambda) \left(-\frac{c}{D} - \lambda\right) - \frac{r}{D} = \lambda^2 + \lambda \frac{c}{D} - \frac{r}{D}.$$

Ses racines sont

$$\lambda_{\pm}^K = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4rD}}{2D}.$$

Remarquons que

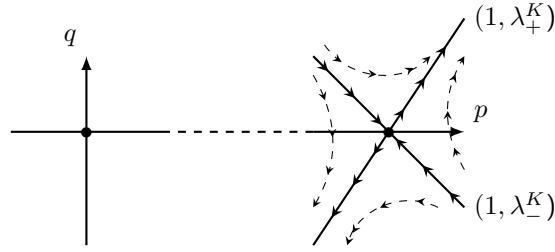
$$\lambda_{-}^K < 0, \quad \lambda_{+}^K > \frac{-c + \sqrt{c^2}}{2D} = 0.$$

Le point  $(K, 0)$  est donc une **noeud instable** (= point selle = col). Pour connaître les directions stables et instables, on calcule un vecteur propre  $\omega_{\pm}^K$  associé aux valeurs propres. Il faut ainsi résoudre

$$\mathcal{J}(K, 0) \omega_{\pm}^K = \lambda_{\pm}^K \omega_{\pm}^K,$$

Évitons les calculs bas du front, on voit tout de suite sur la première ligne de  $\mathcal{J}(K, 0)$  que

$$\omega_{\pm}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{\pm}^K \end{pmatrix}.$$



On s'intéresse désormais au second état stationnaire, afin d'avoir une image complète du plan de phase.

» **Linéarisation autour de  $(0, 0)$ .** Selon (18), la matrice jacobienne est cette fois ci

$$\mathcal{J}(K, 0) = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 0 & D \\ -r & -c \end{pmatrix}.$$

Notons qu'un simple signe  $-$  change par rapport au premier point d'équilibre. Le polynôme caractéristique devient donc

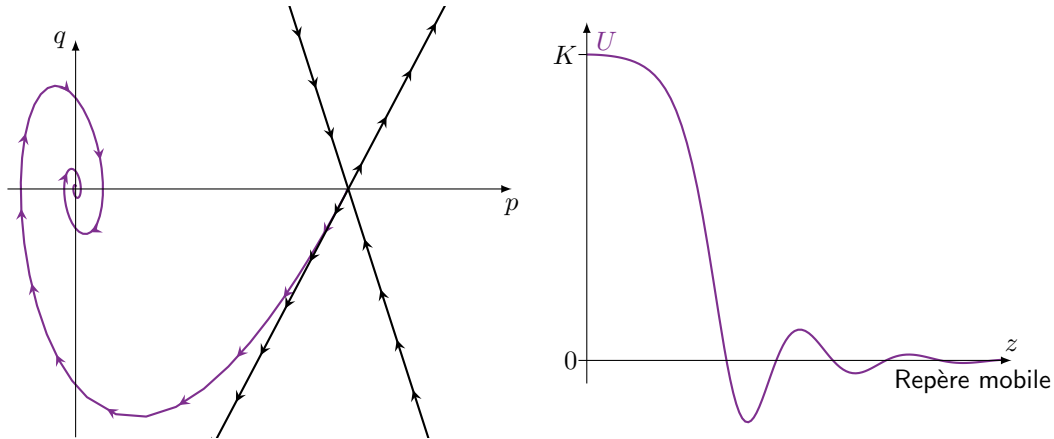
$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \frac{c}{D} + \frac{r}{D}$$

Le déterminant peut désormais changer de signe.

➤ Supposons  $c^2 - 4rD < 0$ . Il y alors deux racines complexes. Les deux racines complexes sont

$$\lambda_{\pm}^0 = \frac{-c \pm i\sqrt{c^2 - 4rD}}{2D}$$

Remarquons que chaque partie réelle de  $\lambda_{\pm}^0$  est strictement négative. Cela veut dire que localement, le point stable  $(0, 0)$  est une **spirale attractive**!



Finalement,  $p$  (et donc  $U$ ) devient négative de manière pseudo-périodique. Cela ne correspond pas à une solution physique et on peut donc oublier ce cas là dans notre recherche de front.

➤ Supposons  $c^2 - 4rD \geq 0$ . Il y a alors deux racines réelles

$$\lambda_{\pm}^0 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4rD}}{2D}$$

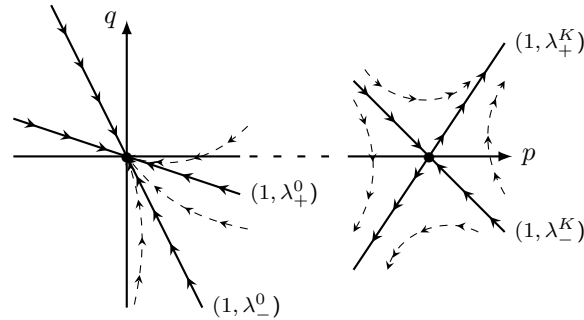
On a toujours  $\lambda_-^0 < 0$ , mais quel est le signe de  $\lambda_+^0$  ? On a

$$\lambda_+^0 < \frac{-c + \sqrt{c^2}}{2D} = 0.$$

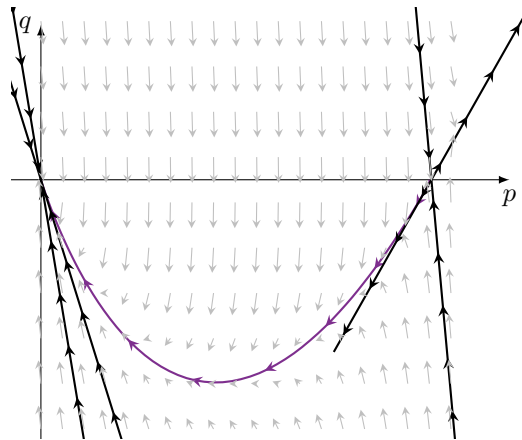
Le point  $(0, 0)$  est donc une **noeud stable**. Les vecteur propre  $\omega_{\pm}^0$  associés aux valeurs propres sont toujours de la forme

$$\omega_{\pm}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{\pm}^0 \end{pmatrix},$$

puisque la première ligne de  $\mathcal{J}$  est indépendante du point où on la regarde. On peut donc compléter l'étude locale des points d'équilibre, et le plan de phase va ressembler à la figure suivante.



Cette étude du diagramme de phase permet de "prouver" qu'il existe un front reliant les deux états stationnaires, tel qu'en plus  $U' < 0$  : le front décroît. En effet, n'importe quelle trajectoire partant de  $(K, 0)$  semble rester dans le quart de plan inférieur. Pour se convaincre que le comportement autour des états d'équilibre donne une idée précise du plan de phase complet, voici une simulation.



On a en outre trouvé une condition *nécessaire* à l'existence de ce front :

$$c \geq c^* := 2\sqrt{rD}. \tag{19}$$

- Notons donc que l'on a déterminé une **infinité de vitesses**  $c$  à laquelle un front peut avancer. Chaque vitesse donne un front différent, la trajectoire du plan de phase que l'on a vu dépend de  $c$ . C'est une différence importante avec les modèles de mécanique des fluides dans laquelle on peut observer des fronts, les "chocs". On pense notamment à l'équation (conservative)  $\partial_t u + \partial_x f(u) = \partial_{xx}^2 u$ . La vitesse des chocs peut être déterminée a priori, avec une relation de type Rankine-Hugoniot.

- ▶ La vitesse  $c^*$  est la vitesse minimale de propagation d'un front. Elle joue un rôle particulier dans l'analyse, voir plus loin (25). Nous expliquerons pourquoi, par bien des égards, il s'agit de la vitesse la plus significative. Notons pour le moment qu'elle augmente quand le taux de croissance ou la capacité de dispersion augmente, ce qui est intuitif.
- ▶ La théorie classique des EDOs nous informe plus finement sur le comportement asymptotique du front  $U$ . Précisément, il existe  $C_{\pm}$  deux constantes telles que

$$U(z) \sim C_+ e^{\lambda_+^0 z} + C_- e^{\lambda_-^0 z} \text{ lorsque } z \rightarrow +\infty \quad (20)$$

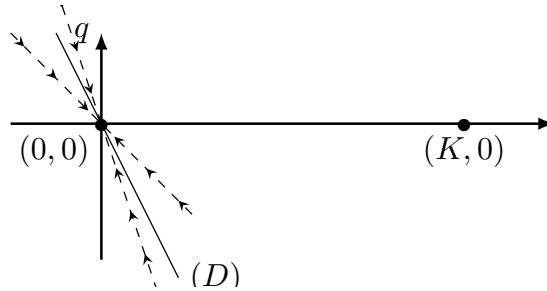
On a ainsi démontré, puisque les deux valeurs propres sont négatives, que l'avant du front *ie* la zone où  $z \gg 1$ , voit une décroissance exponentielle de la population.

### » Une preuve qu'il existe une trajectoire

On peut ne pas être satisfait par l'unique argument utilisé pour construire un front, en regardant la stabilité des points d'équilibre dans le plan de phase. En effet, il faut montrer rigoureusement qu'il existe une trajectoire qui connecte ces deux états stationnaires. Il faut passer du problème linéarisé à (17) qui n'est pas linéaire. On esquisse ici deux preuves qu'une trajectoire relie les deux états stationnaires.

Notons ( $D$ ) la droite du plan de phase d'équation

$$q = -\frac{c}{2D}p, \quad (D)$$



On regarde uniquement le quart de plan  $p > 0, q < 0$ . On sait qu'il existe une trajectoire (instable) issue du point d'équilibre  $(K,0)$ . Notons la  $T_c$ . On va montrer que  $U$ , la solution correspondant à  $T_c$  ne peut pas croiser  $(D)$ . Cela suffira à conclure, car alors la trajectoire ne peut traverser ni l'axe des abscisses, ni l'axe vertical  $p = 1$ . Donc, par le théorème de sortie de tout compact, elle existe pour tout temps, et va converger vers l'état stationnaire  $(0,0)$ .

🔍 Raisonnons par l'absurde. On paramétrise la solution correspondant à la trajectoire  $T_c$  par  $z \mapsto U(z)$ . Supposons qu'il existe un point sur la droite **et** sur la trajectoire. On peut alors se donner  $z_0$ , le premier  $z$  tel que cela ait lieu. En tant que solution, nous savons que

$$-cU'(z_0) = DU''(z_0) + rU(z_0) \left(1 - \frac{U(z_0)}{K}\right)$$

On peut borner le membre de droite (c'est plus généralement une condition de type FKPP que l'on utilise), nous déduisons

$$-cU'(z_0) \leq DU''(z_0) + rU(z_0)$$

Nous utilisons désormais la condition (19) sur la vitesse  $c > 2\sqrt{rD}$ , ou de manière équivalente,  $r < c^2/4D$  :

$$-cU'(z_0) < DU''(z_0) + \frac{c^2}{4D}U(z_0)$$

Comme  $z_0 \in (D)$ , nous avons

$$U'(z_0) = -\frac{c}{2D}U(z_0).$$

et donc

$$-cU'(z_0) < DU''(z_0) - \frac{c}{2}U'(z_0)$$

Autrement dit, on a obtenu

$$U''(z_0) > -\frac{c}{2D}U'(z_0). \quad (21)$$

Cette relation nous dit que  $U$  est sous la droite  $(D)$  juste avant  $z_0$ , ce qui contredit le fait que  $z_0$  soit le premier point où il y a contact, puisque qu'initialement la solution  $U$  est issue de  $(K, 0)$ , au dessus de la droite. Notons qu'être sous la droite correspond en  $z$  signifie  $U'(z) + \frac{c}{2D}U(z) < 0$ . Et en effet, pour  $z$  proche de  $z_0$ , on a

$$\begin{aligned} U'(z) + \frac{c}{2D}U(z) &= U'(z) + (z - z_0)U''(z_0) + o(z - z_0) + \frac{c}{2D} [U(z_0) + (z - z_0)U'(z_0) + o(z - z_0)] \\ &= (z - z_0) \left( U''(z_0) + \frac{c}{2D}U'(z_0) \right) + o(z - z_0), \\ &< 0 \text{ si } z < z_0 \end{aligned} \quad (22)$$

Grâce à (21), nous voyons donc dans (22) que  $U$  est sous la droite  $(D)$  au voisinage de  $z_0$ , ce que l'on affirmait. L'argument fonctionne pour toute vitesse  $c > c^*$ . Notons tout de même qu'il nécessite des d'inégalités strictes et qu'il ne marche donc pas tel quel pour  $c = c^*$ , il faut un peu affiner.

💡 Le coefficient directeur de  $(D)$  correspond à la partie négative commune aux deux valeurs propres  $\lambda_{\pm}^0$ . On sait que la trajectoire est tangente au vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre autour du point d'équilibre, et le coefficient directeur de  $(D)$  la place entre les deux vecteurs propres. L'idée est quelque sorte d'étendre une partie de l'attractivité locale de  $(0, 0)$  à une partie du plan de phase.

🔍 On va revoir le même argument, mais d'un point de vue différent. Ce qui est gagné en brièveté peut être perdu en clarté pour un lecteur sans recul. Néanmoins cette seconde preuve est celle qui se généralise à un plus grand type de termes de réactions  $f$ , et par ailleurs c'est également ainsi que l'on peut traiter le cas limite  $c = c^*$ , mis de côté dans la preuve précédente. Notons  $D^+$  le domaine au dessus de la droite  $(D)$  :

$$D^+ = \left\{ (p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid p > 0, q < 0, \quad q + \frac{c}{2D}p > 0 \right\}. \quad (23)$$

On va montrer que  $D^+$  est positivement invariant par le flot du système  $(p', q')$ . Cela signifie que si initialement  $(p(0), q(0))$  est dans  $D^+$ , la trajectoire issue de ce point,  $(p, q)$ , ne peut pas sortir du domaine. On se donne une telle trajectoire, et on définit une fonctionnelle  $\Lambda(s)$

$$\Lambda(s) = q(s) + \frac{c}{2D}p(s),$$

En la dérivant, on trouve :

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}(s) &= \dot{q}(s) + \frac{c}{2D}\dot{p}(s) = -\frac{c}{D}q(s) - \frac{r}{D}p(s) \left(1 - \frac{p(s)}{K}\right) + \frac{c}{2D}q(s) \\ &= -\frac{c}{2D}q(s) - \frac{r}{D}p(s) \left(1 - \frac{p(s)}{K}\right)\end{aligned}$$

On a utilisé le flot de l'EDO (17). On peut alors utiliser les mêmes inégalités que celles ayant mené à (21). En effet,

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}(s) &\geq -\frac{c}{2D}q(s) - \frac{r}{D}p(s) \geq -\frac{c}{2D}q(s) - \frac{c^2}{4D^2}p(s) = -\frac{c}{2D}q(s) + \frac{c}{2D} \left(-\frac{c}{2D}p(s)\right) \\ &\geq -\frac{c}{2D}q(s) + \frac{c}{2D}q(s) = 0\end{aligned}\quad (24)$$

On a donc  $\dot{\Lambda} < 0, \dot{\Lambda} \geq 0$ . On peut conclure que la trajectoire ne peut pas sortir de la frontière  $\Lambda = 0$  que si on a un signe strict sur  $\dot{\Lambda}$ . C'est le raisonnement par l'absurde fait précédemment. C'est possible en supposant que  $c > c^*$ , mais pour s'affranchir de cette hypothèse, on va essayer d'être plus fin. En repartant de (24), on introduit une constante  $\alpha$  à déterminer, de sorte que

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}(s) &\geq -\alpha\Lambda(s) + \alpha\Lambda(s) - \frac{c}{2D}q(s) - \frac{c^2}{4D^2}p(s) \\ &= -\alpha\Lambda(s) + \left(\alpha - \frac{c}{2D}\right)q(s) + \left(\alpha\frac{c}{2D} - \frac{c^2}{4D^2}\right)p(s).\end{aligned}$$

En prenant  $\alpha = c/2D$ , on trouve donc  $\dot{\Lambda}(s) \geq -\alpha\Lambda(s)$ , et donc  $\Lambda(s) \geq \Lambda(0)e^{-\alpha s} > 0$ .

### » Généralisations

Les résultats et les arguments que nous avons déployés se généralisent à un type plus général de termes de réaction. On parle de cas "monostable", le cadre le plus large, et d'un sous-catégorie le "type KPP", ou "logistique généralisé".

► Condition de monostabilité :

$$f(0) = f(1) = 0, \quad f(u) > 0 \text{ si } 0 < u < 1, \text{ et } f(u) < 0 \text{ ailleurs}$$

► Condition "KPP" : la fonction  $u \mapsto f(u)/u$  est strictement décroissante. En particulier si  $u \geq 0$  :

$$f(u) \leq f'(0)u.$$

L'avantage de ces dernières conditions est qu'elles permettent à nouveau de faire des calculs explicites. On obtient par exemple via la linéarisation autour des états stationnaires  $c^* = 2\sqrt{Df'(0)}$ . Les calculs du plan de phase sont alors les mêmes. Pour démontrer l'existence de la trajectoire, il faut définir un domaine plus précis que  $D^+$  en (23). On considère alors une banane positivement invariante par le flot (17), délimitée par deux arcs reliant  $(K, 0)$ ,  $(0, 0)$ , tangentiuellement.

$$\mathcal{BAN}_{\alpha,\beta} = \left\{ (p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid p > 0, q < 0, \quad -\alpha f(p) > q > -\beta f(q) \right\}$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont optimisés pour qu'un côté de la banane soit tangent aux vecteurs propres de chaque côté, un petit peu dans le même esprit que la définition de la droite  $(D)$ , mais en bien plus sharp. On peut consulter plus de détails dans [1].



### 1.4.3 Stabilité des fronts

Maintenant que nous avons établi l'existence de solutions particulières, revenons au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = D\Delta u(t, x) + ru(t, x) \left(1 - \frac{u(t, x)}{K}\right), & t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x). & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (\text{F-KPP Cauchy})$$

Il faut s'interroger sur la pertinence des solutions particulières vis à vis de la donnée initiale. En particulier, pour quel type de données initiales va-t-on voir les solutions de type front, et lesquels ? La réponse à ces questions est principalement donnée par le théorème suivant :

**Théorème .** *Si  $u_0$  est à support compact, la solution de (F-KPP Cauchy) converge en temps long, et uniformément en espace vers le front de vitesse minimale  $c^*$  :*

$$\sup_{x \geq 0} |u(t, x) - U_{c^*}(x - c^*t + o(t))| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \quad (25)$$

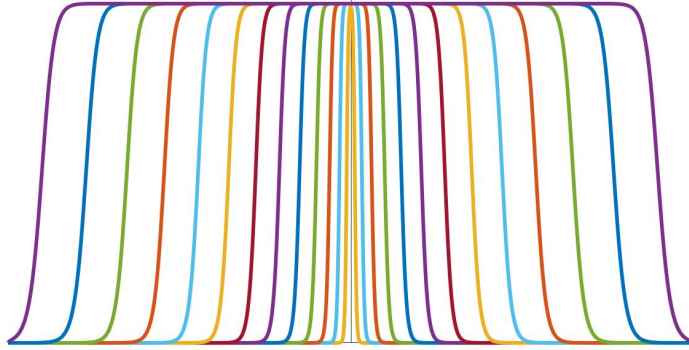


FIGURE 2 – Propagation de la solution de (F-KPP Cauchy), avec une donnée initiale à support compact (au centre). On observe à la fois un front qui se déplace vers la gauche, et un vers la droite.

Plus précisément, la partie négligeable en temps est appelée "le retard" par rapport au front, elle prend la forme suivante

$$o(t) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{D}{r}} \ln t + C + o(\ln t).$$

On parle donc de retard logarithmique,  $C$  étant une constante. Grâce au précédent théorème, la vitesse  $c^*$  est souvent appelée vitesse asymptotique de propagation. En effet, si un observateur se déplace plus vite que cette vitesse depuis l'origine, il ne verra pas d'invasion, tandis que s'il se déplace plus lentement, il verra la population déjà à la capacité d'accueil de l'environnement ( $K$ ).

**» Peut on voir les fronts de vitesses  $c > c^*$  ?**

Pour répondre à cette question, on va faire un raisonnement formel liant vitesse de propagation et comportement asymptotique de la donnée initiale, en suivant les premiers résultats de [9]. En particulier, on suppose que la donnée initiale est de la forme

$$u_0(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} A e^{-\lambda x} \quad (26)$$

$A$  est une constante quelconque, et  $\lambda$  mesure la taille de la queue de la donnée initiale à l'infini. Le principe est de faire l'analyse formelle en se basant sur le problème linéaire, en espérant que le problème complet soit ainsi bien décrit ; on parle de *linear-dependency*. Le phénomène qui nous intéresse a lieu à l'avant du front, là où la densité  $u(t, x)$  est très petite, et en particulier,  $u^2 \ll u$ . On néglige alors la partie non linéaire de (F-KPP), pour obtenir

$$\partial_t u(t, x) \approx D \partial_{xx}^2 u(t, x) + ru(t, x), \quad x \gg 1. \quad (27)$$

Cette équation *linéaire* décrit donc l'avant du front par hypothèse. On va chercher des fronts solutions de (27) sous la forme

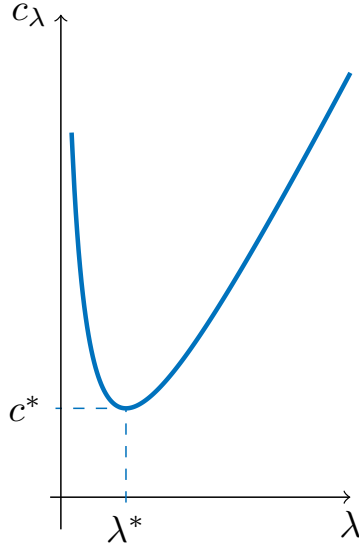
$$U(z) \sim Ae^{-\lambda z} \quad z \gg 1. \quad (28)$$

Notons que cette forme est en accord avec la décroissance de la donnée initiale prescrite par (26), et plus généralement correspond au comportement général à l'avant du front vu en (20). En plongeant (28) dans l'équation (27), on obtient la relation

$$D\lambda^2 - c\lambda + r = 0.$$

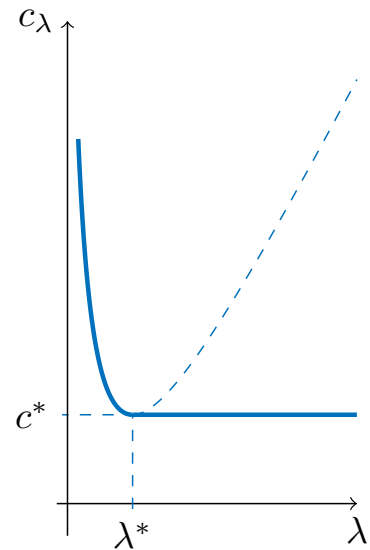
Autrement dit, cette analyse qualitative montre une condition nécessaire reliant la vitesse et la décroissance du front, nommée la *relation de dispersion*

$$c_\lambda = \lambda D + \frac{r}{\lambda}. \quad (29)$$



Le terme "relation de dispersion" est utilisé par analogie avec la physique et l'équation des ondes. Remarquons qu'un calcul simple montre que le minimum de  $c_\lambda$  est atteint pour  $\lambda := \lambda^* = \sqrt{r/D}$ , et qu'on retrouve alors  $c_\lambda \geq c_{\lambda^*} = 2\sqrt{rD}$ . Pour autant, la relation (29) prescrit elle la vitesse de propagation pour toutes les queues  $\lambda$ ?

La réponse est sous-jacente à la question, mais intéressons nous pour nous en convaincre au cas d'une donnée initiale qui décroît assez rapidement, disons que  $\lambda > \lambda^*$ . La relation de dispersion (29) nous informe que le front  $U_\lambda$  avance plus rapidement que le front  $U_{\lambda^*}$ . Mais initialement, le front  $U_\lambda$  est situé **sous** le front  $U_{\lambda^*}$ , en vertu de (26) et  $\lambda > \lambda^*$ . Comme il avance plus vite, il va finir par rattraper le front plus lent, et les deux vont se croiser. Le **principe de comparaison** nous dit que c'est impossible : à partir de données initiales *ordonnées*, les solutions de l'EDP issues de ces conditions initiales sont similairement ordonnées. On est donc arrivé à une absurdité, et  $U_\lambda$  ne peut aller plus vite que  $U_{\lambda^*}$ . Le principe de comparaison implique donc que la vitesse de propagation  $c_\lambda$  est une fonction décroissante de  $\lambda$ . On a donc "démonstré" que pour tout  $\lambda \geq \lambda^*$ , le front se déplace à la vitesse minimale  $c^*$ .



**Théorème .** La solution  $u$  de (F-KPP Cauchy), avec  $u_0 \geq 0$  et décroissante, vérifiant l'hypothèse (26) converge vers l'unique front de vitesse  $c$  tel que

- ▶  $c = D\lambda + \frac{r}{\lambda}$  si  $\lambda < \lambda^*$ ,
- ▶  $c = c^* = 2\sqrt{rD}$  si  $\lambda \geq \lambda^* := \sqrt{r/D}$ .

La convergence a lieu au sens suivant

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - U_c(x - ct + o(t))| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Le terme négligeable est de la forme  $C + o(t)$  dans le premier cas, et simplement  $C$  dans le second.

### » Pour aller plus loin

A partir de ce résultat, la question naturelle est de savoir ce qu'il se passe lorsque la condition initiale décroît encore plus lentement qu'une exponentielle, puisque (29) nous donne  $c_\lambda \rightarrow \infty$  quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Typiquement, on suppose

$$\forall \eta > 0, u_0(x)e^{\eta x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (30)$$

On parle d'hypothèse de queue lourde. Par le principe de comparaison, la solution devrait se propager à une vitesse supérieure à toute constante. C'est le résultat de [4], qui nous précise que la vitesse d'accélération est proportionnelle à  $u_0^{-1}(e^{-rt})$ . Dans le cas où  $u_0(x) = A \exp(-\sqrt{x})$  par exemple, on obtient une propagation proportionnelle à  $r^2 t^2$ .

Une autre généralisation, également très naturelle est de se demander ce qui se passe lorsqu'on remplace la diffusion locale par le terme de dispersion non locale (10). On arrive alors à démontrer une gamme large de résultats, qui ressemblent sensiblement à ceux de l'opérateur local, mais avec des différences cruciales. En particulier, la vitesse de propagation va dépendre fortement de la queue du noyau à l'infini. On se reportera au TD pour plus de détails.

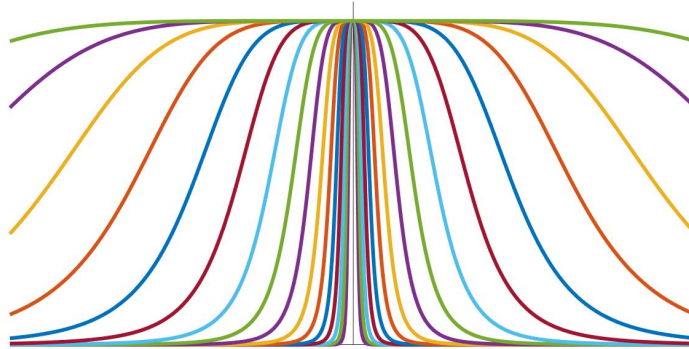


FIGURE 3 – Phénomène d'accélération : il n'existe pas de front.

## 2 Transports

On va passer à l'étude d'une nouvelle structure, dite "hyperbolique", par opposition à la structure "parabolique" vue précédemment. L'hyperbolicité se traduit en un certain sens par une vitesse finie de transport. Cela s'oppose aux propriétés paraboliques qui sont bien souvent synonymes d'une vitesse infinie. Physiquement, on peut s'imaginer le contraste entre la dérive d'un polluant dans les océans (vitesse finie) et celle d'un transfert de température dans une pièce (vitesse infinie).

On appelle **équation de transport** (ou parfois équation de transport sous forme forte) l'équation suivante qui régit une quantité  $n$  qui dépend du temps et d'une autre variable  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\partial_t n(t, x) + v(t, x, n) \cdot \nabla_x n(t, x) = 0, \quad (31)$$

où  $v$  est un champ de vecteur qui peut dépendre de  $t$ ,  $x$  ou de  $n$  (localement comme globalement). La variable  $x$  peut être en toute généralité une position, une vitesse, ...

Pour se convaincre de l'appellation, imaginons une quantité  $q(t, x)$ , qui dépend du temps et de la position spatiale  $x \in \mathbb{R}^d$ , associée à des individus (ou des particules) qui se déplacent à une vitesse  $v(t, x)$ . Supposons que la quantité associée à un (ou plusieurs) individus soit constante. Cela signifie que le long de toutes les trajectoires  $x(t)$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} q(t, x(t)) = \partial_t q(t, x(t)) + \dot{x}(t) \cdot \nabla_x q(t, x(t)), \\ &= \partial_t q(t, x(t)) + v(t, x(t)) \cdot \nabla_x q(t, x(t)). \end{aligned}$$

Comme cette égalité est vraie en tout point  $(t, x(t))$ , on en déduit que  $q$  vérifie l'équation de transport (31). C'est le point de vue Lagrangien, où un observateur suit le point qu'il veut décrire.

On peut également avoir un point de vue dual sur le transport, dit Eulérien. Dans ce point de vue, un observateur "immobile" regarde la quantité en mouvement s'écouler, à une vitesse  $v(t, x)$ . Pour simplifier, imaginons un mouvement unidimensionnel,  $x \in \mathbb{R}$ . Notons  $]\alpha(t), \beta(t)[$  le support de la quantité pour tout temps. Cette fois ci, pour dériver l'équation, on va travailler sur la *densité*  $u(t, x)$  de la quantité en question. L'hypothèse de conservation de la quantité au cours du temps se traduit désormais par

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(t, x) dx \right) = 0.$$

La dérivation nous donne

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \partial_t u(t, x) dx + \beta'(t) u(\beta(t)) - \alpha'(t) u(\alpha(t)) = 0.$$

Mais par définition de  $v$ ,  $\alpha'(t) = v(t, \alpha(t))$  et  $\beta'(t) = v(t, \beta(t))$ . En reportant cela, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \partial_t u(t, x) dx + v(t, \beta(t)) u(\beta(t)) - v(t, \alpha(t)) u(\alpha(t)), \\ 0 &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left( \partial_t u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} [v(t, x) u(t, x)] \right) dx. \end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie pour des frontières  $\alpha$  et  $\beta$  arbitraires, on obtient **l'équation de conservation**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} [v(t, x) u(t, x)] = 0. \quad (32)$$

On l'appelle aussi couramment équation de transport linéaire sous forme conservative (ou faible). La généralisation multi-dimensionnelle se fait via la formule de Green (qui y joue le rôle du théorème fondamental de l'analyse, que l'on a utilisé ici). On obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}_x [v(t, x)u(t, x)] = 0.$$

L'opérateur divergence est parfois noté  $\nabla \cdot F$  puisque  $\operatorname{div} F := \sum_1^d \partial_{x_i} F$ . Structurellement, l'équation (31) est un cas particulier de (32). Il suffit de développer la dérivée de  $vb$  pour s'apercevoir que (32) cache pudiquement un terme supplémentaire :  $\partial_x v(t, x)u(t, x)$ . Les deux équations ne sont donc pas équivalentes, même si le phénomène décrit dans les deux cas est similaire. Pour s'en convaincre d'autant plus, insistons sur le fait que l'inconnue est une **densité** (*eg* de population) pour (32), mais une **quantité** pour (31) (*eg* le nombre d'individus de la population). Insistons sur ce dernier point, en remarquant que si on se donne une famille de densités  $(u_i)_{1 \leq i \leq N}$  vérifiant chacune (32) avec le **même** champ de vitesse  $v$ , alors chaque proportion,  $p_i := u_i / \sum u_i$ , vérifie de son côté l'équation de transport sous forme forte (31). Pour démontrer ce résultat, on calcule d'abord

$$\partial_t p_i = \frac{\partial_t u_i}{\sum u_i} - p_i \frac{\sum \partial_t u_i}{\sum u_i}, \quad \text{et} \quad \partial_x p_i = \frac{\partial_x u_i}{\sum u_i} - p_i \frac{\sum \partial_x u_i}{\sum u_i}.$$

En remplaçant l'expression pour  $\partial_t p_i$ , on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t p_i &= \frac{-\partial_x(vu_i)}{\sum u_i} + p_i \frac{\sum \partial_x(vu_i)}{\sum u_i} = -p_i \partial_x v - v \frac{\partial_x u_i}{\sum u_i} + p_i \partial_x v + p_i v \frac{\sum \partial_x u_i}{\sum u_i}, \\ &= -v \left( \frac{\partial_x u_i}{\sum u_i} - p_i \frac{\sum \partial_x u_i}{\sum u_i} \right) = -v \partial_x p_i. \end{aligned}$$

## 2.1 Bestiaire d'hyperbolicité

On peut rapidement établir un catalogue non exhaustif des différentes formes des équations hyperboliques, qui se retrouvent dans un large champ de domaines : physique, physique statistique, mécanique des fluides etc. Leur point commun est qu'elles expriment toutes, d'une manière ou d'une autre, le transport d'une quantité d'intérêt, à une vitesse finie.

- *Les équations cinétiques.* Dans ce type de modèle la vitesse des particules fait partie des variables. L'exemple le plus simple est l'équation de scattering (ou Boltzmann linéaire)

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = K[f](t, x, v).$$

On reconnaît dans le terme de gauche le transport de particules à vitesse  $v$ . Ces équations sont souvent utilisées pour décrire le mouvement de particules (neutrons, bactéries) à une échelle où leur vitesse et leur position changent après une collision avec une autre particule (two-body problem). L'opérateur de collision  $\mathcal{K}$  prend souvent la forme

$$\mathcal{K}[f](t, x, v) = \int_V k(v, v') f(t, x, v') dv' - \int_V k(v', v) dv' f(t, x, v).$$

Le noyau  $k$  modélise la probabilité de passer de la vitesse  $v$  à  $v'$  après une collision. C'est un début de modèle fondateur en physique statistique. Dans la même veine, citons l'équation de Vlasov linéaire :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + F(t, x) \nabla_v f(t, x, v) = 0.$$

Ici, pas de collisions, mais les particules sont soumises à un champ de force  $F$  : il faut imaginer la modélisation d'une galaxie ou d'un plasma.

- *Les lois de conservations scalaires.* C'est la généralisation non linéaire de l'équation de conservation (32). En raisonnant de la même manière que ce que l'on a fait précédemment, mais en supposant que le déplacement de matière aux frontières  $\alpha$  et  $\beta$  provient d'un flot  $F$ , (et non plus linéairement, à vitesse  $v$ ) on obtient

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x F(u)(t, x) = 0. \quad (33)$$

Par exemple, avec le flot quadratique  $F(u) = u^2/2$ , on parle d'équation de Burgers (dynamique des gazs, acoustique...) Citons également comme célèbre application l'équation du trafic routier

$$\partial_t \rho(t, x) + \partial_x [\rho v(\rho)](t, x) = 0.$$

$\rho$  est la densité de véhicules, et  $v$  leurs vitesses qui dépend de la densité. Il permet de modéliser les embouteillages, avec un succès relatif.

- *Les équations de Hamilton-Jacobi.* Une autre famille d'équations de transport non linéaires prend la forme

$$\partial_t u(t, x) + H(\nabla_x u)(t, x) = 0.$$

En dimension un, c'est équivalent aux lois de conservations scalaires, en posant  $u = \partial_x v$  et  $F = H$ . Un exemple typique est celui de l'équation eikonale modélisant la propagation des rayons lumineux :  $H(p) = |p|^2/2$ .

- *Les systèmes hyperboliques.* L'exemple le plus connu est l'équation des ondes :

$$\partial_{tt}^2 u(t, x) - c^2 \Delta u(t, x) = 0,$$

qui se met sous la forme d'un système hyperbolique pour des nouvelles variables  $(v, u) := (\partial_t w, c \nabla_x w)$  :

$$\begin{cases} \partial_t v - c \nabla \cdot u = 0, \\ \partial_t u - c \nabla v = 0. \end{cases}$$

On peut facilement généraliser la structure pour inclure les équations de Maxwell en électromagnétisme. Un autre type de système hyperbolique est celui des lois de conservations scalaires, généralisant (33). Le principal exemple est le système de Navier-Stokes pour la dynamique des gazs compressibles.

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x [\rho v] &= 0 && \text{(conservation de la masse)} \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x [(\rho v^2 + p(\rho, T))] &= 0 && \text{(conservation de la quantité de mouvement)} \\ \partial_t E + \partial_x [(E + p)v] &= 0 && \text{(conservation de l'énergie)} \end{aligned}$$

$(\rho, v, T, p, E) = (\text{masse, vitesse, température, pression, énergie})$ . Une loi de pression est par exemple

$$p(\rho, T) = \rho T, \quad E = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\rho T}{\gamma - 1}.$$

Il en existe bien d'autres que nous ne citerons pas ici, mais on pourra consulter [11].

## 2.2 Le transport unidimensionnel à vitesse constante

Dans ce cas où  $v(t, x) := v$ , remarquons tout d'abord que l'équation de transport (31) et l'équation de conservation (32) sont équivalentes. On s'intéresse donc à l'équation

$$\begin{cases} \partial_t n(t, x) + v \partial_x n(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ n(0, x) = n_0(x). \end{cases} \quad (\mathcal{T}_v)$$

On trouve facilement une solution : si  $n_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , alors  $(t, x) \mapsto n_0(x - vt)$  vérifie  $(\mathcal{T}_v)$ . Une autre manière de le voir est de remarquer que pour tout  $t > 0$  et  $z \in \mathbb{R}$ , on a l'égalité  $n(t, z + vt) = n_0(z)$ . En d'autres termes,  $n$  est constant le long de la droite  $\gamma(t, z) := z + vt$ . On dit que  $\gamma$  est une **courbe caractéristique**. Le paramètre  $z$  correspond à tous les pieds possibles des caractéristiques, voir la figure ci-dessous. On peut retrouver dans ces deux approches la dualité Eulérienne/Lagrangienne évoquée plus haut, sur un cas quasi trivial. Néanmoins ces idées se généralisent quand on veut s'attaquer aux plus complexes (31) et (32). On montre le théorème suivant :

**Théorème .** *Si  $n_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , alors il existe une unique solution à  $(\mathcal{T}_v)$  qui appartient à l'espace  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ . Cette solution est*

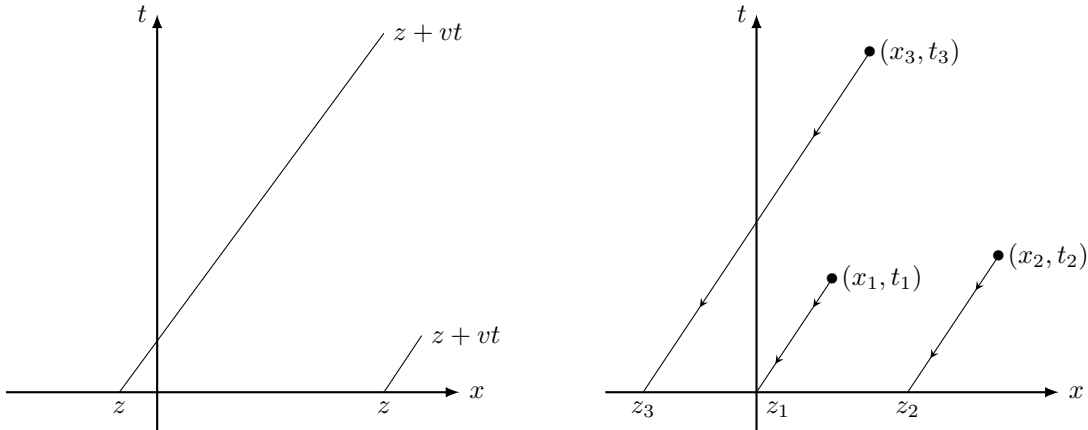
$$n(t, x) = n_0(x - vt).$$

La preuve de ce théorème se fait par analyse synthèse. Supposons dans un premier temps qu'il existe une telle solution de  $(\mathcal{T}_v)$ . Alors, soit  $z \in \mathbb{R}$ , fixé. On peut dériver  $\varphi_z(t) := n(t, \gamma(t, z))$ . On trouve

$$\frac{d}{dt} \varphi_z(t) = \partial_t n(t, \gamma(t, z)) + \partial_t \gamma(t, z) \partial_x n(t, \gamma(t, z)) = \partial_t n(t, \gamma(t, z)) + v \partial_x n(t, \gamma(t, z)) = 0,$$

puisque  $n$  vérifie l'équation. On en déduit que  $\varphi_z$  est constante, donc a fortiori pour tout temps  $t > 0$   $\varphi_z(t) = \varphi_z(0)$ . On a ainsi écrit  $n(t, z + vt) = n(0, z)$ . En posant le changement de variable  $x = z + vt$ , on a démontré que nécessairement,  $n(t, x) = n_0(x - vt)$ . La synthèse est une simple vérification, que l'on a déjà faite.

Voici un diagramme explicatif de la méthode des caractéristiques, ce que l'on vient d'expliquer revient à raisonner sur la figure de gauche.



Maintenant, on peut avoir un raisonnement légèrement différent, en se fixant un point  $(t_i, x_i)$  et chercher la valeur de  $n(t_i, x_i)$  (figure de droite). On va chercher les coordonnées de  $z_i$ , car on sait

que  $n(t_i, x_i) = n_0(z_i)$ . Les droites caractéristiques sont une famille paramétrée par  $z \in \mathbb{R}$ ; ce sont les droites d'équation  $x = z + vt$ , c'est à dire l'ensemble des points  $(x, (x - z)/v)$  du plan (figure de gauche). Passer par  $(x_i, t_i)$  impose  $z_i = x_i - vt_i$ .

On va voir une manière plus rigoureuse de cette approche, dans laquelle on ne connaît pas *a priori* les courbes caractéristiques. Elle a l'avantage d'être plus intuitive, plus générale, et donc plus théorique. **On fixe un point**  $(t, x)$  et on cherche la valeur de  $n(t, x)$ .

Le coeur de la résolution de  $(\mathcal{T}_v)$  consiste à chercher les solutions de  $\dot{\gamma}(s) = v$ . On garde cela, mais on va paramétrer les solutions de l'EDO par le point  $(t, x)$ , en imposant que la solution y passe. Notons  $X(s, t, x)$  une telle courbe (c'est en fait ce qu'on appelle le flot de l'EDO). Par définition, c'est la solution de

$$\begin{cases} \partial_s X(s, t, x) = v, & s \in \mathbb{R}, \\ X(t, t, x) = x. \end{cases} \quad (34)$$

A priori on a bien  $s \in \mathbb{R}$ . On trouve en résolvant (34) que  $X(s, t, x) = v(s - t) + x$ . Notons désormais  $\varphi(s) := n(s, X(s, t, x))$ . On s'autorise un abus de notation, puisque  $\varphi$  dépend aussi de  $(t, x)$ , mais qu'on considère ici le couple comme un paramètres fixé. En dérivant, on trouve

$$\frac{d}{ds} \varphi(s) = \partial_t n(s, X(s, t, x)) + \partial_s X(s, t, x) \partial_x n(s, X(s, t, x)) = \partial_t n(s, X(s, t, x)) + v \partial_x n(s, X(s, t, x)) = 0.$$

Autrement dit,  $n$  est constant le long de la trajectoire  $X$ . En particulier,  $\varphi(s) = \varphi(t)$ . Or il s'agit du temps où l'on impose la condition de Cauchy au flot  $X$  dans la définition (34). On connaît donc sa valeur, ce qui nous donne, pour tout  $s \in \mathbb{R}$

$$n(s, X(s, t, x)) = n(t, X(t, t, x)) = n(t, x). \quad (35)$$

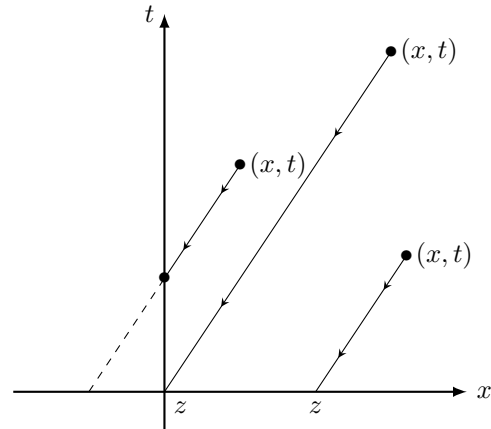
On retrouve ainsi notre inconnue que l'on cherche à déterminer  $n(t, x)$ , et on rappelle que  $(t, x)$  est toujours fixé. On peut explorer le long de  $X$  la trajectoire caractéristique en faisant évoluer  $s$ , nous avons montré que cela nous donnait toujours la valeur de  $n(t, x)$ . Mais a priori cela ne nous aide pas puisque on a désormais une équation implicite sur  $n$ . On remarque que si on remonte jusqu'au temps  $s = 0$ , on y connaît  $n$  et donc l'équation devient explicite :

$$n(t, x) = n(0, X(0, t, x)) = n_0(X(0, t, x)) = n_0(x - vt).$$

Ainsi, on a retrouvé la solution du théorème.

### 2.3 Sur le demi-espace

On suppose désormais que pour une raison physique, biologique on la variable  $x$  doit rester positive. On imagine par exemple que c'est une taille de cellule, un âge etc. Comme on le voit sur la figure, il y a un problème de détermination de l'équation dès que  $t - xv > 0$ , ie dès qu'on est au dessus de la droite médiane  $t = x/v$ . La figure nous indique la solution : il faut prescrire une condition de bord pour  $x = 0$ . On va donc trouver une solution à l'équation suivante



$$\begin{cases} \partial_t n(t, x) + v \partial_x n(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}_+, \\ n(0, x) = n_0(x) \\ n(t, 0) = B(t). \end{cases} \quad (\mathcal{T}_v^+)$$



On va alors démontrer le théorème suivant :

**Théorème .** *Si la fonction*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} B(-x/v) & \text{si } x \leq 0 \\ n_0(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

*est de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , alors il existe une unique solution à  $(\mathcal{T}_v^+)$  qui appartient à l'espace  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ . Cette solution est prescrite par*

$$n(t, x) = \begin{cases} B(t - x/v) & \text{si } x - vt \leq 0 \\ n_0(x - vt) & \text{si } x - vt > 0. \end{cases} \quad (36)$$

En toute rigueur, on peut refaire la même preuve par Analyse/Synthèse que précédemment. On va plutôt ici esquisser les deux types de preuves que nous avons évoqué plus tôt. Avant cela, remarquons que l'on peut s'affranchir de l'hypothèse de régularité du recollement de  $B$  et  $n_0$  pour écrire la solution  $n$ . Néanmoins, cette "solution" n'est plus  $\mathcal{C}^1$ , puisqu'on va propager la discontinuité exactement à la même vitesse que la solution. Cela reste une solution, mais en un sens faible. Le manque de régularité fait ainsi sortir ce type de solution du champ de ce cours.

» Pour appliquer notre première méthode, il faut connaître l'équation des courbes caractéristiques, ce qui est facile au vu de la figure précédente. On commence par le cas où les courbes caractéristiques interceptent la droite  $t = 0$ . On se donne donc  $(t, x)$  tels que  $x - vt > 0$ . Sois  $z > 0$ , en dérivant on voit que

$$\frac{d}{dt} [n(t, z + vt)] = [\partial_t n + v \partial_x n](t, z + vt) = 0.$$

On a donc  $n(t, z + vt) = n_0(z)$ , et comme  $x - vt > 0$ , on peut inverser en posant  $x = z + vt$  et on obtient  $n(t, x) = n_0(x - vt)$ . Regardons maintenant au dessus, un point  $(x, t)$  tel que  $x - vt \leq 0$ . Le pied de la caractéristique passant par  $(x, t)$  a pour coordonnée  $(0, t - x/v)$  dans le plan, voir figure ci-contre. Dit autrement, la caractéristique issue de  $\tau$  a pour équation dans le plan  $t = \tau + x/v$ . En se fixant  $\tau > 0$ , et en dérivant le long de la caractéristique, on a cette fois ci

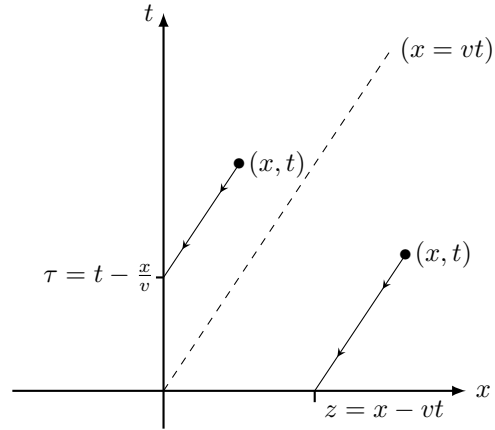
$$\frac{d}{dx} \left[ n\left(\tau + \frac{x}{v}, x\right) \right] = \left[ \frac{1}{v} \partial_t n + \partial_x n \right] \left(\tau + \frac{x}{v}, x\right) = 0.$$

On a donc  $n\left(\tau + \frac{x}{v}, x\right) = n(\tau, 0) = B(\tau)$ , et comme  $x - vt \leq 0$ , on peut inverser en posant  $t = \tau + x/v$  et on obtient  $n(t, x) = B(t - x/v)$ .

» On repart de (34), pour obtenir comme précédemment :  $X(s, t, x) = v(s - t) + x$ . En dérivant  $n$  le long des caractéristiques, on retrouve alors la formule (35) :

$$n(t, x) = n(s, v(s - t) + x) = n(s, vs + x - vt). \quad (37)$$

On veut évaluer cette relation en un temps  $s$  qui nous donne une formule explicite.



- ▶ Si  $x - vt > 0$ , alors on peut évaluer (37) en  $s = 0$ , pour obtenir  $n(t, x) = n(0, x - vt) = n_0(x - vt)$ .
- ▶ Si  $x - vt \leq 0$ , alors on évalue (37) en  $s_0$  tel que  $vs_0 + x - vt = 0$ , soit  $s_0 := t - x/v$ . On remarque que  $s_0 \geq 0$  car  $x - vt \leq 0$ . On obtient alors  $n(t, x) = n(s_0, 0) = B(s_0) = B(t - x/v)$ .

## 2.4 Un modèle démographique : l'équation de renouvellement

On s'intéresse désormais à l'équation de renouvellement, qui est un type particulier d'équation de transport à vitesse constante posée sur le demi espace :

$$\begin{cases} \partial_t n(t, a) + \partial_a n(t, a) = -\mu(a)n(t, a), & t > 0, a \in \mathbb{R}_+, \\ n(0, a) = n_0(a) \\ n(t, 0) := B(t) = \int_0^\infty \beta(a)n(t, a)da. \end{cases} \quad (\mathcal{R})$$

La variable  $a$  est un âge ; le terme de transport exprime donc un vieillissement à vitesse constante, ici 1. Elle peut aussi représenter une taille de cellule, qui croit donc linéairement avec le temps. Dans tous les cas, c'est bien une quantité qui doit être positive, et on a donc bien besoin du terme de bord  $B(t)$ , la natalité. Comparé au cas précédent, ce dernier prend une forme particulière, puisqu'on suppose que la natalité  $B$  est calculée à partir de la distribution entière de la population, en fonction d'un taux de naissance (ou fertilité)  $\beta$ , qu'on imagine dépendre seulement de l'âge. C'est cette forme particulière de la natalité qui donne son nom à l'équation de renouvellement. Pour avoir un modèle démographique réaliste, il faut aussi pouvoir enlever des individus. Pour cela on a un taux de mort, qui dépend aussi seulement de l'âge, et qui est noté  $\mu$ .

Ce modèle remonte aux travaux de Sharpe & Lotka en 1911 [13], puis de Kermack & McKendrick [7] pour une modélisation épidémiologique. Il a notamment été très utilisé en Chine, dans une perspective de contrôlabilité (*ie* jouer sur les paramètres pour contrôler une densité de population future), [14]. Cette étude a été la source de la politique de l'enfant unique (1980). On pourra lire une introduction au sujet dans [2].

On note  $\pi(a)$  la probabilité d'être en vie (jusqu') à l'âge  $a$  :

$$\pi(a) := \exp\left(-\int_0^a \mu(a')da'\right).$$

Si on veut que tous les individus finissent par mourir, il est nécessaire d'avoir  $\pi(\infty) = 0$ , et donc

$$\int_0^\infty \mu(a)da = +\infty.$$

Parfois on modélise un âge limite  $a^\dagger$  tel que  $\mu(a) \xrightarrow[a \rightarrow a^\dagger]{a < a^\dagger} +\infty$ . Parmi les autres hypothèses usuellement faites, on peut mentionner  $b \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$  et  $\beta$  bornée.

### 2.4.1 Résolution par les caractéristiques

Pour mener l'étude théorique, on met en oeuvre la méthodologie vue précédemment des caractéristiques. On se fixe  $(t, a)$ . L'équation (34), paramétrée par  $(t, a)$ , donne ici

$$\partial_s X(s, t, a) = 1, \quad X(t, t, a) = a,$$

qui se résout en  $X(s, t, a) = s - t + a$ . On va voir que désormais,  $n$  n'est plus constante le long des caractéristiques. Soit  $\varphi(s) := n(s, X(s, t, a))$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\varphi(s) &= \partial_t n(s, X(s, t, a)) + \partial_s X(s, t, a) \partial_a n(s, X(s, t, a)) = \partial_t n(s, X(s, t, a)) + \partial_a n(s, X(s, t, a)), \\ &= -\mu(a)n(s, X(s, t, a)) = -\mu(a)\varphi(s). \end{aligned}$$

For heureusement cette EDO se résout explicitement. On obtient, en intégrant entre  $s$  et  $t$

$$\varphi(t) = \varphi(s) \exp\left(-\int_s^t \mu(X(s', t, a)) ds'\right).$$

On en déduit une formule implicite portant sur  $n(t, a)$ , vraie a priori pour tout  $s$  :

$$\begin{aligned} n(t, a) &= n(s, X(s, t, a)) \exp\left(-\int_s^t \mu(X(s', t, a)) ds'\right), \\ &= n(s, s - t + a) \exp\left(-\int_s^t \mu(a + s' - t) ds'\right) \end{aligned} \quad (38)$$

► Supposons  $a - t \geq 0$ , alors on peut évaluer (38) en  $s = 0$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} n(t, a) &= n(0, a - t) \exp\left(-\int_0^t \mu(a + s' - t) ds'\right), \\ &= n_0(a - t) \exp\left(-\int_{a-t}^a \mu(a') da'\right). \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas là, on obtient la formule

$$n(t, x) = n_0(a - t) \frac{\pi(a)}{\pi(a - t)}. \quad (39)$$

► Si  $a - t \leq 0$ , alors on évalue (37) en  $s_0$  tel que  $s_0 + a - t = 0$ , soit  $s_0 := t - a$ . On obtient

$$\begin{aligned} n(t, a) &= n(t - a, 0) \exp\left(-\int_{t-a}^t \mu(a + s' - t) ds'\right), \\ &= B(t - a) \exp\left(-\int_0^a \mu(a') da'\right) = B(t - a)\pi(a). \end{aligned} \quad (40)$$

Ainsi, en recollant ce qu'on a obtenu en (39) et (40), on obtient finalement

$$n(t, x) = \begin{cases} B(t - a)\pi(a) & \text{si } t \geq a \\ n_0(a - t) \frac{\pi(a)}{\pi(a - t)} & \text{si } t < a. \end{cases} \quad (41)$$

On peut comparer cette formule à celle obtenue en (36), pour s'apercevoir qu'il ya des termes supplémentaires, du fait que  $n$  ne soit pas constant le long de ses courbes caractéristiques.

►► Pour autant, a-t-on complètement résolu l'équation de départ ? En réalité la formule (41) reste implicite, car la fonction de natalité  $B$  dépend de toute la distribution  $n$ . En d'autres termes, pour calculer  $B$  au temps  $t$  fixé il faut d'abord connaître  $n(t, a)$  pour tout  $a$ . Pour s'affranchir de

cette contrainte, une technique est de réinjecter la solution (41) dans la condition de bord à  $a = 0$ , qui définit  $B$ . On obtient, en séparant les intégrales par rapport au signe de  $t - a$  :

$$B(t) := \int_0^\infty \beta(a)n(t,a)da = \int_0^t \beta(a)B(t-a)\pi(a)da + \int_t^\infty \beta(a)n_0(a-t)\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}da \quad (42)$$

Cette équation est toujours implicite sur  $B$ , mais on n'a plus besoin de connaître  $n$ . En revanche, on va avoir besoin de connaître  $B(s)$  pour tous les temps précédents, pour  $0 \leq s \leq t$ . Ce genre d'équation est appelée "Equation de Volterra du deuxième type", et il existe une littérature assez riche sur la manière de les résoudre, théoriquement et numériquement. On ne va pas s'étendre ici sur ce sujet (cela implique notamment des transformées de Fourier). On pourra consulter le livre très complet [6]. On y trouvera notamment une preuve que l'équation (42) définit une unique solution  $B$  continue. Via la formule (41), on a ainsi complètement résolu ( $\mathcal{R}$ ).

## 2.4.2 Comportement asymptotique via le problème spectral

On va s'intéresser désormais à une solution particulière de l'équation de renouvellement, de la forme  $(t, a) \mapsto e^{\lambda t}N(a)$ . Ces solutions spéciales jouent un rôle particulier, similaire à celui des états stationnaires d'une EDO. On cherche donc un couple  $(\lambda, N)$ , solution de

$$\begin{cases} \lambda N(a) + N'(a) = -\mu(a)N(a), & a \in \mathbb{R}_+, \\ N(0) = \int_0^\infty \beta(a)N(a)da. \end{cases} \quad (43)$$

$\lambda$  est une valeur propre, et  $N$  un vecteur propre associé. On s'intéresse souvent au signe de  $\lambda$ . En effet, son rôle dans l'expression de la solution particulière  $n$  est de faire croître ou décroître la population, exponentiellement. C'est donc un indicateur de la disparition/persistence de la population. On peut résoudre la première ligne de (43) en intégrant  $N$  :

$$N(a) = N(0) \exp\left(-\lambda a - \int_0^a \mu(\alpha)d\alpha\right). \quad (44)$$

Si on injecte cela dans la deuxième équation, on obtient

$$1 = \int_0^\infty \beta(a) \exp\left(-\lambda a - \int_0^a \mu(\alpha)d\alpha\right) da. \quad (45)$$

Cette équation permet de déterminer  $\lambda$ . En effet, si on écrit (45) sous la forme  $F(\lambda) = 1$ , on peut vérifier que la fonction  $F$  est telle que

$$F(\lambda) = 1, \quad F \text{ est décroissante,} \quad \text{et } F(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0. \quad (46)$$

La monotonie de  $F$  nous dit déjà qu'il existe un unique  $\lambda$  solution de (45). Pour la même raison, pour déterminer le signe de  $\lambda$ , tout dépend du signe de  $F(0)$  :

$$\blacktriangleright \text{ Si } F(0) > 1, \lambda > 0 \quad \blacktriangleright \text{ Si } F(0) = 1, \lambda = 0 \quad \blacktriangleright \text{ Si } F(0) < 1, \lambda < 0. \quad (47)$$

» Peut on s'attendre à ce que le signe de  $\lambda$  influe le comportement asymptotique de n'importe quelle solution  $n$  de ( $\mathcal{R}$ ) ?

En effet, la solution particulière ayant amené à  $(\lambda, N)$  n'a aucune chance d'être compatible avec la donnée initiale  $n_0$ . Néanmoins, on peut se convaincre que la réponse est oui, en revenant à la formule

(42). Si on suppose  $t$  grand, la deuxième intégrale devient le reste d'une quantité intégrable, et on peut donc la négliger. On écrit donc

$$B(t) \underset{t \text{ grand}}{\sim} \int_0^t \beta(a)B(t-a)\pi(a)da$$

En d'autres termes, la fertilité  $n(t, 0)$  vérifie

$$n(t, 0) \underset{t \text{ grand}}{\sim} \int_0^t \beta(a)n(t-a, 0) \exp\left(-\int_0^a \mu(\alpha)d\alpha\right) da$$

Remarquons ici que  $n(t, 0) \sim Ce^{\lambda t}$  ( $C$  est une constante quelconque), va vérifier l'équation précédente, avec le même  $\lambda$  que celui défini par (45). On imagine donc que si  $n$  est défini par ( $\mathcal{R}$ ), alors

$$n(t, x) \underset{t \text{ grand}}{\sim} e^{\lambda t}N(a),$$

où le couple  $(\lambda, N)$  est défini par (43). Or, on l'a vu, le signe de  $\lambda$  est déterminé par la valeur  $F(0)$ . Définissons

$$\mathcal{R}_0 := F(0) = \int_0^\infty \beta(a)\pi(a)da.$$

Alors  $\mathcal{R}_0$  est en quelque sorte un taux de reproduction moyen. On a alors "établi" le résultat suivant, se basant sur (47) :

- ▶ Si  $\mathcal{R}_0 > 0$ , la population croît exponentiellement.
- ▶ Si  $\mathcal{R}_0 = 0$ , la population tend vers un état stationnaire (auto-similarité).
- ▶ Si  $\mathcal{R}_0 < 0$ , la population décroît vers 0 (extinction).

Dans la prochaine section nous allons démontrer en partie ce résultat dans un cas particulier de l'équation de renouvellement ( $\mathcal{R}$ ).

## 2.5 Un modèle de division cellulaire

Nous nous intéressons ici dans cette partie à un cas particulier de l'équation de renouvellement. On veut modéliser la division cellulaire. A l'occasion de la mitose, une celle se sépare en deux nouvelles cellules. Avec le vocabulaire de la partie précédente, on peut imaginer que pour chaque cellule qui disparaît, deux nouvelles apparaissent. Ainsi, on va reprendre le modèle précédent, mais en supposant que  $b/2 = d := k$ .

On veut étudier le comportement asymptotique ( $t \rightarrow \infty$ ) de l'équation de division cellulaire suivante :

$$\begin{cases} \partial_t n(t, a) + \partial_a n(t, a) = -k(a)n(t, a), & t, a > 0, \\ n(t, a = 0) = 2 \int_0^\infty k(a)n(t, a)da & t > 0, \\ n(t = 0, a) = n_0(a) & a \geq 0. \end{cases} \quad (48)$$

Pour cela, on reprend ce qu'on a vu précédemment, et on définit un problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} \lambda N(a) + N'(a) + k(a)N(a) = 0, & a > 0, \\ N(0) = 2 \int_0^\infty k(a)N(a)da & t > 0. \end{cases} \quad (49)$$

Comme avancé dans la partie précédente, on veut montrer que ces solutions sont globalement stables : une solution de (48) ressemble en temps long à  $e^{\lambda t}N(a)$ . Pour mesurer cette convergence, on introduit  $\varphi$ , vecteur propre dual de  $N$  ;

$$\lambda\varphi(a) - \varphi'(a) + k(a)\varphi(a) = 2\varphi(0)k(a). \quad (50)$$

**Proposition** (Existence, unicité, renormalisation profils stationnaires).

Supposons que  $k$  est une fonction continue et positive telle que

$$\int_0^\infty k(a)da = +\infty. \quad (51)$$

Alors il existe un unique triplet positif ou nul  $(\lambda, N, \varphi)$  solution des équations (49) et (50) tel que

$$\int_0^\infty N(a) da = \int_0^\infty N(a)\varphi(a) da = 1. \quad (52)$$

L'existence et l'unicité de ces fonctions n'est pas évidente, on peut suivre le plan de preuve qui suit :

» Preuve de la proposition

(A) Quel est le signe de  $\lambda$  ?

(B) Intégrer l'équation sur  $\varphi$  pour trouver

$$\varphi(a) = \varphi(0) \exp\left(\int_0^a \lambda + b(\alpha)d\alpha\right) \left[1 - 2 \int_0^a \beta(a') \exp\left(-\int_0^{a'} \lambda + b(\alpha')d\alpha'\right) da'\right].$$

(C) Justifier l'unicité et les choix de normalisation de (52).

On a désormais les outils pour préciser le comportement asymptotique de  $n$  et la vitesse de convergence.

**Théorème** ([8]). Supposons qu'il existe  $\mu_0 > 0$  tel que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \quad 2k(a) \geq \frac{\mu_0\varphi(a)}{\varphi(0)}. \quad (53)$$

Alors toute solution de l'équation (48) vérifie

$$\int_0^\infty \left|n(t, a)e^{-\lambda t} - \rho_0 N(a)\right| \varphi(a) da \leq e^{-\mu_0 t} \int_0^\infty |n_0(a) - \rho_0 N(a)| \varphi(a) da,$$

avec  $\rho_0 := \int_0^\infty \varphi(a)n_0(a)da$ .

La preuve du théorème fait appel à la propriété d'entropie relative généralisée, via une fonctionnelle  $\mathcal{H}[n]$  définie pour  $n \in L^1(\mathbb{R}_+)$ , et  $H$  une fonction scalaire :

$$\mathcal{H}[n] := \int_0^\infty \varphi(a)N(a)H\left(\frac{n(a)}{N(a)}\right) da$$

**Théorème** (Entropie Relative généralisée). *Pour toute solution  $n$  de (48), on a*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}[n(t, \cdot) e^{-\lambda t}] = -\mathcal{D}[n(t, \cdot) e^{-\lambda t}].$$

On a utilisé la notation

$$\mathcal{D}[n] := \varphi(0)N(0) \left[ \int_0^\infty H \left( \frac{n(a)}{N(a)} \right) d\mu(a) - H \left( \int_0^\infty \frac{n(a)}{N(a)} d\mu(a) \right) \right],$$

où  $d\mu(a) := 2k(a)N(a) da/N(0)$ .

Ainsi, l'ERG joue ici un rôle similaire à celui des fonctionnelles de Lyapunov dans la théorie des EDOs, voir [3, 10]. La preuve des ces résultats est laissée en exercice.

### » Preuve du Théorème d'Entropie Relative Généralisée

- (I) Pourquoi si  $H$  est une fonction convexe,  $\mathcal{D}[n] \leq 0$ ?
- (II) Justifier que  $d\mu$  est une mesure de probabilité.
- (III) On note  $m(t, a) := n(t, a)e^{-\lambda t}$ .
  - (a) Vérifier l'identité

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{m(t, a)}{N(a)} + \frac{\partial}{\partial a} \frac{m(t, a)}{N(a)} = 0.$$

- (b) En déduire

$$\partial_t H \left( \frac{m(t, a)}{N(a)} \right) + \partial_a H \left( \frac{m(t, a)}{N(a)} \right) = 0.$$

- (IV) (a) Calculer  $\partial_a(\varphi N)(a)$ .
- (b) Démontrer que

$$\partial_t \left[ \varphi(a)N(a)H \left( \frac{m(t, a)}{N(a)} \right) \right] + \partial_a \left[ \varphi(a)N(a)H \left( \frac{m(t, a)}{N(a)} \right) \right] = -2\varphi(0)k(a)N(a).$$

- (V) Conclure la preuve du théorème.

### » Preuve du Théorème principal

- 1. Utiliser le théorème d'ERG pour  $H = Id$  pour montrer que

$$\int_0^\infty \varphi(a)n(t, a)e^{-\lambda t} da = \rho_0.$$

- 2. On pose  $h(t, a) := n(t, a)e^{-\lambda t} - \rho_0 N(a)$ .

- (a) Démontrer que :

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \varphi(a) |h(t, a)| da = \left| \int_0^\infty [2\varphi(0)k(a) - \mu_0\varphi(a)] h(t, a) da \right| - \varphi(0) \int_0^\infty 2k(a) |h(t, a)| da.$$

On pourra utiliser le théorème d'ERG à nouveau pour  $H(x) = |x - \rho_0|$ , ainsi que la condition (53).

(b) En déduire que

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \varphi(a) |h(t, a)| da \leq -\mu_0 \int_0^\infty \varphi(a) |h(t, a)| da.$$

3. Conclure sur la convergence exponentielle.

### » Cas particulier

On suppose que le taux de division est minoré par une constante positive :

$$\exists k_m > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+, k(a) \geq k_m.$$

Montrer que l'hypothèse (51) est vérifiée pour  $\mu_0 = k_m$ .

## Références

- [1] Aronson, D. G. and Weinberger, H. F. (1974). Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation. In *Partial Differential Equations and Related Topics : Ford Foundation Sponsored Program at Tulane University, January to May, 1974*, pages 5–49. Springer.
- [2] Bacaër, N. (2009). *Histoires de mathématiques et de populations*. Cassini.
- [3] Berthelin, F. (2017). *Equations différentielles*, volume 34. Cassini.
- [4] Hamel, F. and Roques, L. (2010). Fast propagation for KPP equations with slowly decaying initial conditions. *Journal of Differential Equations*, 249(7) :1726–1745.
- [5] Hislop, P. D. and Sigal, I. M. (2012). *Introduction to spectral theory : With applications to Schrödinger operators*, volume 113. Springer Science & Business Media.
- [6] Iannelli, M., Milner, F., et al. (2017). The basic approach to age-structured population dynamics. *Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences*. Springer, Dordrecht.
- [7] Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, 115(772) :700–721.
- [8] Michel, P., Mischler, S., and Perthame, B. (2005). General relative entropy inequality : an illustration on growth models. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 84(9) :1235–1260.
- [9] Mollison, D. (1977). Spatial contact models for ecological and epidemic spread. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 39(3) :283–313.
- [10] Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media.
- [11] Perthame, B. (2006). *Transport equations in biology*. Springer Science & Business Media.
- [12] Roques, L. (2013). *Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale : Avec exercices dirigés*. Editions Quae.



- [13] Sharpe, F. R. and Lotka, A. J. (1911). L. a problem in age-distribution. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 21(124) :435–438.
- [14] Song, J. (1982). Some developments in mathematical demography and their application to the people's republic of china. *Theoretical Population Biology*, 22(3) :382–391.
- [15] Tychonoff, A. (1935). Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Livre de mathématiques, Institut de mathématiques Steklov de l'Académie des sciences de Russie*, 42(2) :199–216.