

## Payote septembre 2023

une modélisation du paysage et de l'habitat avec des EDP,  
aspects numériques de l'estimation

BioSp, Olivier Bonnefon

jeudi 19 octobre 2023

plan:

Environnement de simulation et d'estimation

Modéliser des haies avec des EDP

Optimisation de la forme d'un habitat favorable

# pourquoi un environnement dédié à l'approche mécanistico-statistiques ?

**Faciliter l'utilisation de modèles basés sur des équations aux dérivées partielles (EDP) pour des études spatialisées en épidémiologie ou en dynamique des populations**

**Lien modèle-paramétré / observations**

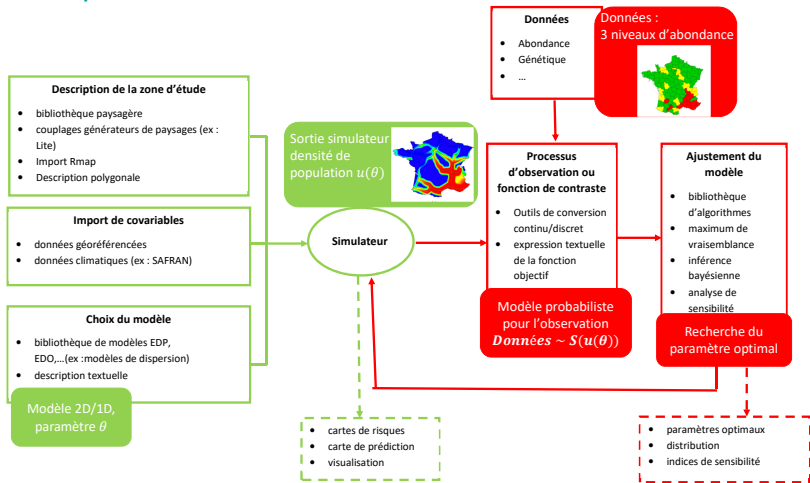
Environnement portable et utilisable par des non spécialistes du calcul

Proposer des modèles originaux

Disposer de méthodes d'estimations ad'hoc

Volonté d'aller vers une version 100 % python pour rendre accessible la simulation et l'ajustement de modèles EDP

⇒ Environnement Mécanistico-Statistique: MSE



Projet soutenu par le CATI IMOTEP (visibilité et collaborations)

# Modéliser des haies avec des EDP, c'est possible!

EDP 1D-2D, inspire de *H. Berestycki et al., 2014*

$$\begin{aligned} & \infty \\ < \quad \partial_t u \quad D \partial_{xx} u = v(x; 0; t) \quad u \quad \partial t > 0; \partial x \in \mathbb{R}; \\ & \quad \partial_t v \quad d \quad v = v(1 \quad v) \quad \partial t > 0; \partial(x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^+ \\ & \quad \quad \quad d \partial_y v(x; 0; t) = u(x; t) \quad v(x; 0; t) \quad \partial t > 0; \partial x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Accélération si  
 $D > 2d$

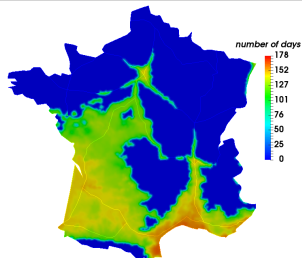
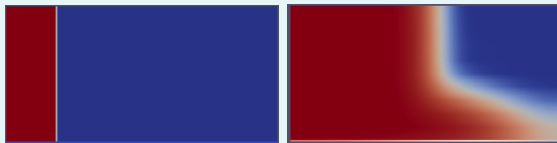


# Modéliser des haies avec des EDP, c'est possible!

EDP 1D-2D, inspire de *H. Berestycki et al., 2014*

$$\begin{aligned} & \infty \\ < \quad @_t u \quad D @_{xx} u = v(x; 0; t) \quad u \quad 8t > 0; 8x \in \mathbb{R}; \\ & \quad @_t v \quad d \quad v = v(1 \quad v) \quad 8t > 0; 8(x; y) \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{R}^+ \\ & \quad \quad \quad d @_y v(x; 0; t) = u(x; t) \quad v(x; 0; t) \quad 8t > 0; 8x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Accélération si  
 $D > 2d$



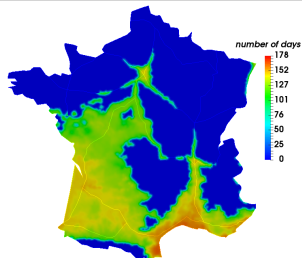
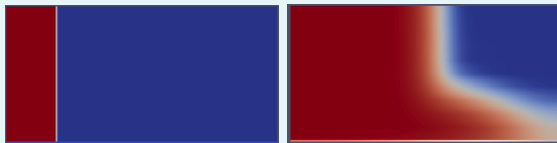
propagation du moustique tigre

# Modéliser des haies avec des EDP, c'est possible!

EDP 1D-2D, inspire de *H. Berestycki et al., 2014*

$$\begin{aligned} & \infty \\ < \quad @_t u \quad D@_{xx}u = v(x;0;t) \quad u \quad 8t > 0; 8x \in \mathbb{R}; \\ & \quad @_t v \quad d \quad v = v(1 \quad v) \quad 8t > 0; 8(x;y) \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{R}^+ \\ & \quad \quad \quad d@_y v(x;0;t) = u(x;t) \quad v(x;0;t) \quad 8t > 0; 8x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Accélération si  
 $D > 2d$



propagation du moustique tigre

# Generalites sur l'estimation des parametres du modele par maximum de vraisemblance

On dispose de:

un modèle paramétré par  $\theta \in \mathbb{R}^n$ ,

une fonction d'état  $F(\theta; U) = 0$ , (ex: une EDP),

une vraisemblance  $P(\text{Obs}|\theta)$ :

Optimisation: On cherche  $\hat{\theta} = \text{argmax}(J(\theta) = P(\text{Obs}|\theta))$



# Generalites sur l'estimation des parametres du modele par maximum de vraisemblance

On dispose de:

un modèle paramétré par  $\theta \in \mathbb{R}^n$ ,

une fonction d'état  $F(\theta; U) = 0$ , (ex: une EDP),

une vraisemblance  $P(\text{Obs}|\theta)$ :

Optimisation: On cherche  $\hat{\theta} = \text{argmax}(J(\theta) = P(\text{Obs}|\theta))$

## algorithmes d'optimisation envisageables

exploration de l'espace  $\mathbb{R}^n$ :  $\exp(n)$  évaluations de  $J(\theta)$

méthode de itérative de descente ( $J(\theta_i); \nabla J(\theta_i)$ )  $i < 30$

- évaluation de  $J$  + différence finie dans chaque direction,  $n + 1$
- évaluation de  $J$  + dérivation automatique, 1,  $n$  EDP linéaires
- évaluation de  $J$  + état adjoint, 1, 1 EDP linéaire et  $n$  calculs de  $U$

# Optimisation de forme: recherche d'un habitat favorable

modele Fisher-KPP: EDP non-lineaire parametree

$$\begin{aligned} \partial_t u &= u + R u(1 - u) & u &\in \mathcal{Q}; \\ u(0; x) &= u_0(x) & & \\ \partial_n u &= 0 & \partial t &\in [0; 1]; \partial x \in \Omega; \end{aligned}$$

Formes souvent utilisées pour  $R$  :

$$B(x; y) = \int_{\Omega} \text{type de sol} g_i(x; y)$$

$$R(x; y) = \int_{\Omega} T(x; y) + \int_{\Omega} \text{COV}(x; y)$$

Avec  $\int_{\Omega} R < 20$

# Optimisation de forme: recherche d'un habitat favorable

modele Fisher-KPP: EDP non-lineaire parametree

$$\begin{aligned} \partial_t u &= u + R u(1 - u) & u &\in \mathcal{Q}; \\ u(0; x) &= u_0(x) & & \\ \partial_n u &= 0 & \partial t &\in [0; 1]; \partial x \in \Omega; \end{aligned}$$

Formes souvent utilisées pour  $R$  :

$$B(x; y) = \int_{\Omega} \text{type de sol} g_i(x; y)$$

$$R(x; y) = \int_{\Omega} T(x; y) + \int_{\Omega} \text{COV}(x; y)$$

Avec  $\int_{\Omega} R < 20$

## 1) simulation d'un modele Fisher-KPP: EDP non-lineaire / $u$

$$\begin{aligned} \partial_t u &= u + R u(1 - u) & u &\in \mathcal{Q}; \\ u(0; x) &= u_0(x) & & \\ \partial_n u &= 0 & \partial t \in [0; 1]; \partial x \in & \end{aligned}$$

Calcul de la vraisemblance ( $R_{ref}$ ):  $J(\cdot) = \int_{\mathcal{Q}} v(u)$  avec  $\int \in \mathbb{R}^{48}$

## 1) simulation d'un modele Fisher-KPP: EDP non-lineaire ! $u$

$$\begin{cases} \partial_t u &= u + R u(1 - u) & u & \text{ sur } (t; x) \in Q; \\ u(0; x) &= u_0(x) & & \text{ sur } \mathbb{R}^d; \\ \partial_n u &= 0 & & \text{ sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

Calcul de la vraisemblance ( $R_{ref}$ ):  $J(\cdot) = \int_{\Omega} v(u)$  avec  $v \in \mathbb{R}^{48}$

## 2) calcul de l'etat adjoint en $u$ : EDP lineaire, retrograde en temps

$$\begin{cases} \partial_t p &= p + R p(1 - 2u) & p + v^j(u) & \text{ sur } (t; x) \in Q; \\ p(T; x) &= 0 & & \text{ sur } \mathbb{R}^d; \\ \partial_n p &= 0 & & \text{ sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

### 1) simulation d'un modele Fisher-KPP: EDP non-lineaire ! $u$

$$\begin{cases} \partial_t u &= u + R u(1 - u) & u & \in \mathcal{Q}; \\ u(0; x) &= u_0(x) & & \\ \partial_n u &= 0 & \partial t \in [0; 1]; \delta x \in \mathcal{Q}; & \end{cases}$$

Calcul de la vraisemblance ( $R_{ref}$ ):  $J(\cdot) = \int_{\mathcal{Q}} v(u)$  avec  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{48}$

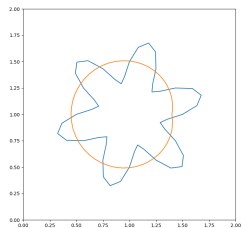
### 2) calcul de l'etat adjoint en $u$ : EDP lineaire, retrograde en temps

$$\begin{cases} \partial_t p &= p + R p(1 - 2u) & p + v'(u) & \in \mathcal{Q}; \\ p(T; x) &= 0 & & \\ \partial_n p &= 0 & \partial t \in [0; 1]; \delta x \in \mathcal{Q}; & \end{cases}$$

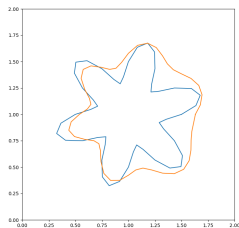
### 3) calcul de $rJ(\cdot)$

$$rJ(\cdot)_i = \int_{t \in M_{i-1}; M_{i+1}} d(M; M_i) p(t; M) u(t; M) (1 - u(t; M))$$

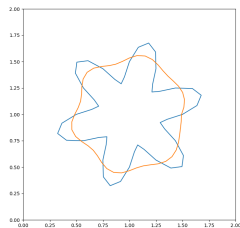
# Exemple 1: trajectoire optimisation (Quasi-Newton)



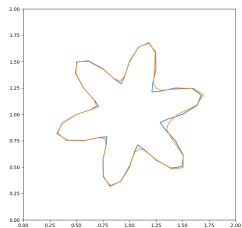
it 0



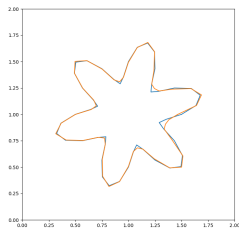
it 1



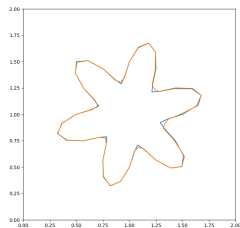
it 2



it 9

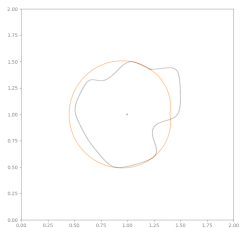


it 17

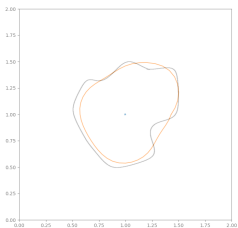


it 20

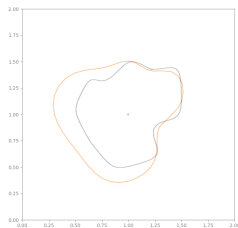
## Exemple 2 : trajectoire optimisation (Quasi-Newton)



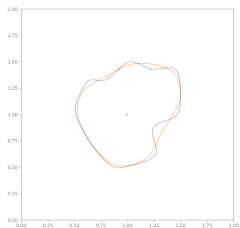
it 0



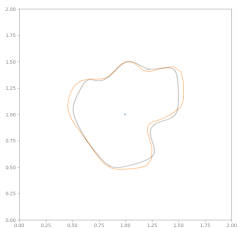
it 1



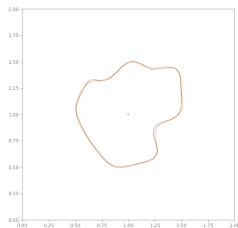
it 2



it 3



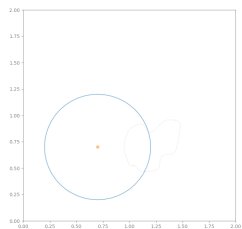
it 6



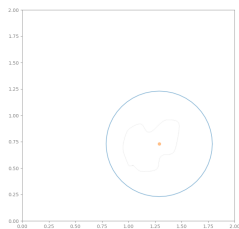
it 10



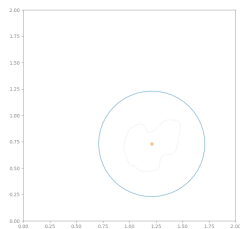
# Exemple 3 : trajectoire optimisation (Quasi-Newton)



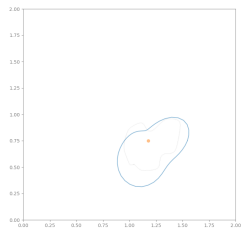
it 0



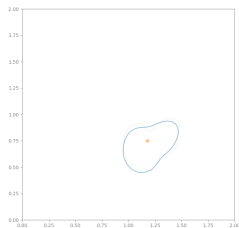
it 1



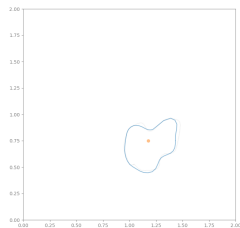
it 2



it 10



it 15



it 35

# Conclusion

## Objectifs 2024 pour d'environnement informatique MSE:

rendre accessible la simulation et l'estimation de modèles EDP

paysage: intégrer les fonctionnalités parcelles-haies

calcul des variations ad'hoc

Pour cela, un CDD d'un an d'IE calcul est recruté (BPMP).

=> catalyser dès maintenant des collaborations